УДК 53(075.8)
Б93
ББК 22.3

БУТИКОВ Е. И., КОНДРАТЬЕВ А. С. **ФИЗИКА**: Учеб. пособие: В 3 кн. Кн.2. **Электродинамика. Оптика.** — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004 — 336 с. — ISBN 5-9221-0108-0 (Кн. 2).

Учебник принципиально нового типа. Последовательность изложения соответствует логической структуре физики как науки и отражает современные тенденции ее преподавания. Материал разделен на обязательный и дополнительный, что позволяет строить процесс обучения с учетом индивидуальных способностей учащихся, включая организацию их самостоятельной работы. Задачи служат как для получения новых знаний, так и для развития навыков исследовательской деятельности.

Для учащихся школ, гимназий, лицеев с углубленным изучением физико-математических дисциплин, а также для подготовки к конкурсным экзаменам в вузы.

Ил. 252.

Рецензенты: профессор *В.И. Николаев*, преподаватель *М.Л. Шифман*

Учебное издание

БУТИКОВ Евгений Иванович
КОНДРАТЬЕВ Александр Сергеевич

ФИЗИКА
Книга 2. **Электродинамика. Оптика**

Редактор *Д.А. Миртова*
Операторы набора и корректоры: *Л.Г. Быканова*, *А.К. Розанов*
Оформление обложки *А.Ю. Алехиной*

ЛР № 071930 от 06.07.99.
Подписано в печать 16.02.01. Формат 60×90/16. Бумага офсетная. Печать офсетная
Усл. печ. л. 21,0. Уч.-изд. л. 23,1. Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117997, Москва, Профсоюзная, 90
E-mail: fizmat@maik.ru, http://www.fml.ru

Отпечатано с готовых диапозитивов
в ФГУП «Ивановская областная типография»
153008, г. Иваново, ул. Типографская, 6.
E-mail: 091-018@adminet.ivanovo.ru

ISBN 5-9221-0110-2
ISBN 5-9221-0108-0 (Кн. 2)

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

В окружающем нас макроскопическом мире все разнообразие встречающихся сил, кроме сил тяготения, представляет собой проявление электромагнитных взаимодействий. При изучении законов механики, описывающих движение тел, мы встречались с силами упругости, которые позволяют твердым телам сохранять свою форму и размеры и обнаруживают себя при их деформации. Силы упругости препятствуют изменению объема жидкостей и сжатию газов. Встречались мы и с силами трения, проявления которых в окружающем нас мире чрезвычайно многообразны и отнюдь не сводятся только к торможению движения твердых тел, жидкостей и газов.

Все эти силы, несмотря на внешние различия их проявлений, — близкие родственники: все они имеют общую физическую природу, общее происхождение — это электромагнитные силы. Благодаря электромагнитному взаимодействию мы можем видеть, ибо свет — одно из его проявлений. Даже сама жизнь была бы невозможна без этих сил: все происходящее в живой материи в конечном счете обусловлено электромагнитными взаимодействиями.

В отличие от электромагнитных сил действие ядерных и гравитационных сил в природе существенно только либо в очень малых, либо в очень больших масштабах. Эти силы проявляются в атомных ядрах и в космических объектах. Но и там велика роль электромагнитных сил. Почти невозможно указать явление, которое не было бы связано с действием электромагнитных сил. А что касается строения электронной оболочки атомов, сцепления атомов в молекулы и кристаллы, поведения атомов в жидкостях и газах, электронов и ионов в плазме — здесь все определяется исключительно электромагнитными силами. Иначе говоря, они отвечают за все физические и химические свойства вещества, от атома до живой клетки.

При первоначальном знакомстве с физикой вы уже встречались с самыми разнообразными проявлениями электромагнитных взаимодействий в природе и в технике. Это прежде всего электростатическое взаимодействие неподвижных зарядов, электрический ток, заключающийся в направленном движении зарядов, магнитное поле, создаваемое электрическим током, в свою очередь действующее на проводники с током, движущиеся заряды и магнитные стрелки.

Тесная связь между электричеством и магнетизмом ярко обнаруживает себя в явлении электромагнитной индукции: изменяющееся магнитное поле может вызывать ток в проводнике, так как при из-

менении магнитного поля возникает электрическое поле. Поэтому в физике говорят о едином электромагнитном поле, которое включает в себя взаимосвязанные электрическое и магнитное поля.

Электромагнитное поле может существовать и в отсутствие электрических зарядов или токов: именно такие самоподдерживающиеся электрическое и магнитное поля представляют собой электромагнитные волны, к которым относятся видимый свет, инфракрасное, ультрафиолетовое и рентгеновское излучения, радиоволны и т. д.

В книге 2 курса физики мы будем детально изучать фундаментальные закономерности, относящиеся к этому кругу явлений. Основными изучаемыми объектами будут электрические заряды и электромагнитное поле, переносящее их взаимодействие. Мир электричества и магнетизма гораздо сложнее и богаче мира простых механических перемещений, доступного непосредственному наблюдению.

I. ЭЛЕКТРОСТАТИКА

Изучение электродинамики начнем с простейшего случая — с электростатики, в которой рассматривается взаимодействие неподвижных относительно друг друга электрических зарядов и создаваемое ими неизменное во времени электростатическое поле.

§ 1. Электрический заряд. Закон Кулона

Электрический заряд и электрическое поле — первичные понятия, подобно понятиям массы и гравитационного поля в механике. Это значит, что их нельзя определить через другие, более простые понятия. Все, что мы можем сделать — это описать их свойства.

Электрический заряд. Электрический заряд характеризует способность тела к определенному взаимодействию, описываемому на языке сил. В отличие от гравитационного взаимодействия, проявляющегося всегда как притяжение между телами, электрическое взаимодействие может быть как притяжением, так и отталкиванием. Известным из опыта фундаментальным свойством электрического заряда является то, что он существует в двух видах, условно называемых положительными и отрицательными зарядами. Заряды одного знака отталкиваются. Взаимодействие зарядов противоположных знаков заключается в их взаимном притяжении.

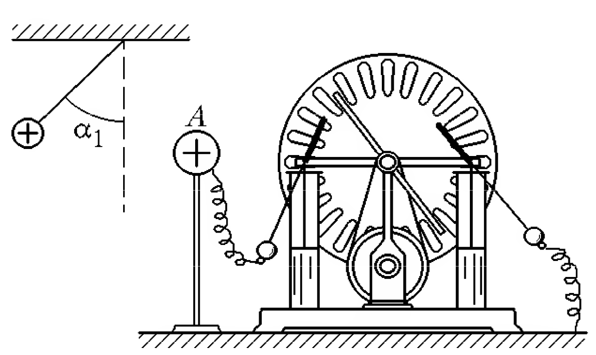
Макроскопическому телу можно сообщить заряд любого знака. Когда эти заряды присутствуют в одинаковых количествах, тело называют электрически *нейтральным* или *незаряженным*. Другими словами, в макроскопическом теле положительные и отрицательные заряды могут компенсировать друг друга. Незаряженное тело при равномерном распределении входящих в него положительных и отрицательных зарядов электрически не взаимодействует с другими заряженными телами.

Электрический заряд макроскопического тела определяется суммарным зарядом образующих его элементарных частиц. Окружающий нас мир представляет собой хорошо скомпенсированную смесь положительных и отрицательных зарядов. Такая компенсация неудивительна, поскольку одноименные заряды отталкиваются.

Причина, по которой электрический заряд существует именно в двух видах, в современной физике до конца не выяснена. Возможно, что в этом находит свое отражение определенная симметрия. Поло-

жительный и отрицательный заряды можно рассматривать как противоположные проявления одного качества, аналогично тому как понятия «правое» и «левое» выступают противоположными проявлениями свойства пространственной симметрии. Оказывается, что вопрос симметрии «правого» и «левого» тесно связан с этой двойственностью электрического заряда и с другой фундаментальной симметрией, а именно с симметрией по отношению к обращению времени. Некоторый свет на эти вопросы проливает физика элементарных частиц.

Электризация тел. Простейшие эксперименты, в которых на качественном уровне могут быть обнаружены описанные закономерности взаимодействия электрических зарядов, известны еще со времен



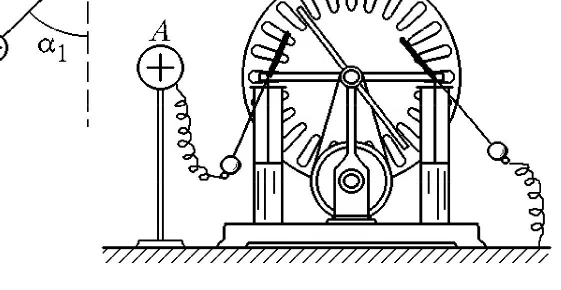


Рис. 1. Электростатическая машина

Рис. 2. Простейший электроскоп

Б. Франклина (вторая половина XVIII века). Существуют разные способы электризации тел, т. е. превращения электрически нейтральных тел в заряженные. В частности, это возможно путем трения тел друг о друга (электризация трением).

Разделение электрических зарядов противоположных знаков возможно и путем электризации через влияние, без непосредственного контакта между телами (электрическая индукция). Наиболее распространенный прибор для разделения зарядов — электростатическая машина (рис. 1). Обнаружить у тела наличие электрического заряда можно с помощью электроскопа (рис. 2) или более современного прибора — электрометра (рис. 3), имеющего, в отличие от электроскопа, экранирующий металлический корпус, благодаря которому его показания не подвержены влиянию посторонних окружающих тел.

Проводники и диэлектрики. По поведению зарядов в наэлектризованном теле все вещества делятся на *проводники* и *изоляторы* (диэлектрики). У диэлектриков сообщенный им заряд остается в том месте, куда он был помещен при электризации. В проводниках сообщенный заряд может свободно перемещаться по всему телу. Именно благодаря этому свойству проводящие тела можно заряжать электризацией через влияние. В равновесии из-за взаимного отталкивания свободные заряды располагаются на внешней поверхности проводника.

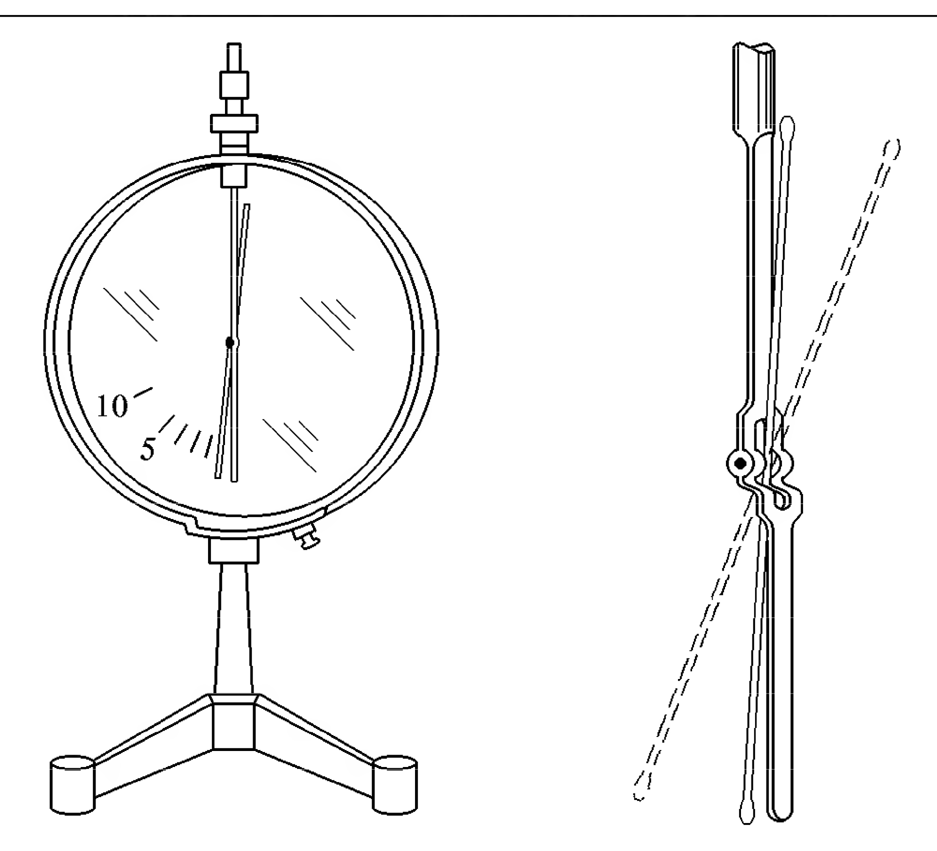


Рис. 3. Электрометр и устройство его механизма

Среди большого числа разнообразных электростатических экспериментов немало таких, которые для своего объяснения даже на качественном уровне требуют привлечения весьма сложных и тонких понятий. Примером может служить широко известный опыт по притягиванию незаряженных клочков бумаги наэлектризованной расческой.

Закон Кулона. Первые экспериментальные количественные результаты, относящиеся к взаимодействию неподвижных электрических зарядов, были получены Ш. Кулоном в конце XVIII столетия. Для измерения сил, действующих между зарядами, Кулон использовал созданный им прибор, называемый крутильными весами (рис. 4*а*). На тонкой упругой нити *Н* подвешено легкое коромысло *К* из изолятора, на одном конце которого укреплен проводящий шарик *А*, а на другом — противовес *П*. Рядом с шариком *А* можно поместить другой такой же неподвижный шарик *В*. Стеклянный цилиндр защищает чувствительные части прибора от движения воздуха.

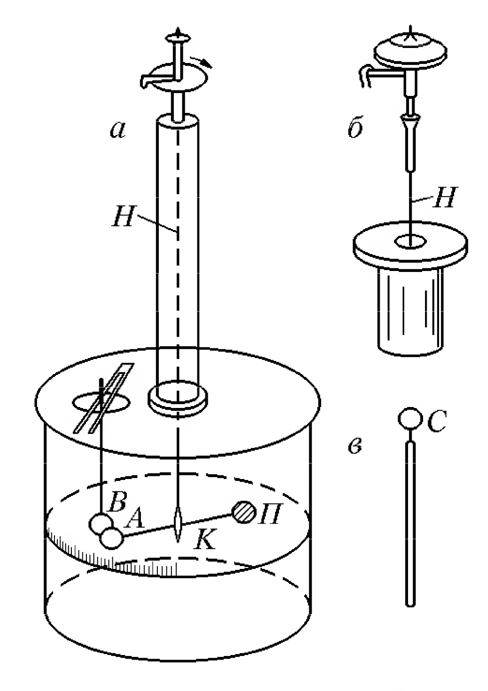


Рис. 4. Крутильные весы Кулона

Чтобы установить зависимость силы взаимодействия от расстояния между зарядами, шарикам *А* и *В* сообщают произвольные заряды, прикасаясь к

ним третьим заряженным шариком C, укрепленным на ручке из диэлектрика. По углу закручивания упругой нити (рис. 4*б*) можно измерить силу отталкивания одноименно заряженных шариков, а по шкале прибора — расстояние между ними. В результате этих опытов Кулон установил, что сила взаимодействия направлена вдоль линии, соединяющей оба заряда, и обратно пропорциональна квадрату расстояния между ними:

$$F \sim \frac{1}{r^2}.$$

Зависимость силы взаимодействия от заряда можно установить следующим образом. Когда заряженный проводящий шарик приводится в соприкосновение с таким же незаряженным шариком, то естественно предположить, что в силу симметрии заряд между ними распределится поровну. При этом оказывается, что сила взаимодействия между шариками, на одном из которых описанным способом заряд уменьшен вдвое, также уменьшается в два раза при том же расстоянии между шариками. Повторяя эту процедуру несколько раз, можно убедиться, что при уменьшении заряда любого из шариков в два, четыре и т. д. раз сила взаимодействия оказывается пропорциональной заряду каждого шарика.

Обобщая результаты таких опытов, можно сформулировать закон, описывающий силу взаимодействия неподвижных электрических зарядов, — *закон Кулона.* Сила взаимодействия двух точечных зарядов q_1 и q_2 в вакууме пропорциональна произведению зарядов и обратно пропорциональна квадрату расстояния r между ними:

$$F = k\,\frac{|q_1|\cdot|q_2|}{r^2}\,. \tag{1}$$

Чтобы формула давала не только значения модуля силы, но и ее направление, удобно записать закон Кулона в векторном виде:

$$\mathbf{F}_{12} = k\,\frac{q_1 q_2}{r_{12}^3}\,\mathbf{r}_{12}. \tag{2}$$

Здесь $\mathbf{F}_{12}$ — сила, действующая на заряд q_1 со стороны заряда q_2, $\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ — разность радиусов-векторов точечных зарядов q_1 и q_2, т. е. вектор, проведенный от заряда q_2 к заряду q_1 (рис. 5). Легко видеть, что формула (2) дает правильное направление силы $\mathbf{F}_{12}$ при любых знаках зарядов q_1 и q_2, т. е. и при отталкивании ($q_1 q_2 > 0$, рис. 5*а*), и при притяжении ($q_1 q_2 < 0$, рис. 5*б*) этих зарядов.

Выражение для силы $\mathbf{F}_{21}$, действующей на заряд q_2 со стороны q_1, получается из (2) перестановкой индексов 1 и 2 и находится в полном соответствии с третьим законом Ньютона:

$$\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12},$$

которому удовлетворяет взаимодействие неподвижных относительно друг друга электрических зарядов.

Точность, которая может быть достигнута в опытах с крутильными весами, сравнительно невелика. Наша убежденность в том, что закон Кулона точно описывает электростатическое взаимодействие, основана на большом количестве подтверждающих его других экспериментальных данных. Оказывается, что закон Кулона выполняется точно как для очень больших, так и для очень малых расстояний. В частности, исследования атомных явлений позволяют заклю-

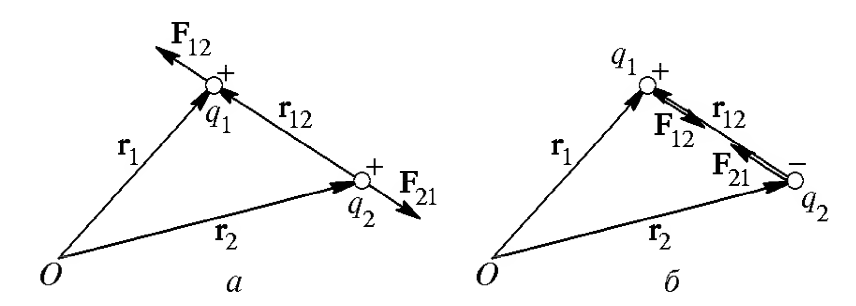


Рис. 5. Взаимодействие точечных зарядов (закон Кулона)

чить, что он справедлив по крайней мере вплоть до расстояний порядка размеров атомного ядра (10^{-15} м).

Отметим, что электростатическое взаимодействие тел со сферически-симметричным распределением заряда описывается такими же выражениями (1) и (2), как и взаимодействие точечных зарядов, помещенных в центры этих тел.

Единицы заряда. Коэффициент k, фигурирующий в формулах (1) и (2), зависит от выбора единиц. В физике получили широкое распространение две системы единиц, в которых введение единиц электромагнитных величин основано на разных физических законах. В так называемой системе СГСЭ (абсолютная электростатическая система), построенной на трех основных единицах — длины, времени и массы, — единица электрического заряда является производной. Она выбирается на основе закона Кулона так, чтобы коэффициент k в нем был равен единице. Такая единица заряда называется *абсолютной электростатической единицей*. Это такой заряд, который действует в вакууме на равный ему заряд, удаленный на расстояние один сантиметр, с силой, равной одной дине. Размерность заряда в системе СГСЭ устанавливается из формулы (1) при $k = 1$:

$$\dim q = \dim \sqrt{Fr^2} = (MLT^{-2}L^2)^{1/2} = M^{1/2}L^{3/2}T^{-1}. \tag{3}$$

Формула, выражающая закон Кулона, в системе СГСЭ имеет вид

$$F = \frac{|q_1| \cdot |q_2|}{r^2}. \tag{4}$$

В Международной системе единиц (СИ) в числе семи основных единиц фигурирует единица силы электрического тока — *ампер* (А). Эта единица устанавливается на основе магнитного взаимодействия токов, о чем будет подробно рассказано при изучении магнитного поля тока. Единица заряда — *кулон* (Кл) — является производной и выражается через две основные единицы — силы тока и времени. По определению один кулон — это заряд, проходящий за одну секунду через поперечное сечение проводника, в котором поддерживается постоянный электрический ток силой один ампер:

$$1\ \text{Кл} = 1\ \text{А}\cdot 1\ \text{с} = 1\ \text{А}\cdot\text{с}. \tag{5}$$

В электродинамике показывается, что между кулоном и абсолютной электростатической единицей заряда имеется следующее соотношение:

$$1\text{Кл} = 3\cdot 10^9\ \text{ед. СГСЭ}. \tag{6}$$

Поскольку в СИ единица заряда установлена независимо от закона Кулона, коэффициент k в (1) уже не равен единице. Его принято записывать в виде $k = 1/(4\pi\varepsilon_0)$, где ε_0 — некоторая размерная постоянная, называемая *электрической постоянной*. Выражение для закона Кулона в СИ имеет вид

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\ \frac{|q_1|\cdot|q_2|}{r^2}. \tag{7}$$

Значение электрической постоянной ε_0 можно найти с помощью соотношения (6) между кулоном и единицей заряда СГСЭ. Пусть имеется два точечных заряда $q_1 = q_2 = 1$ Кл, удаленных на расстояние $r = 1$ м. Тогда согласно формуле (4) сила взаимодействия равна

$$F = \frac{(3\cdot 10^9)^2}{(10^2)^2}\ \text{дин} = 9\cdot 10^9\ \text{Н}.$$

С другой стороны, согласно (7), эта же сила равна

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\ \frac{1\ \text{Кл}\cdot 1\ \text{Кл}}{1^2\ \text{м}^2}.$$

Отсюда

$$\varepsilon_0 = \frac{1}{4\pi(9\cdot 10^9)}\ \frac{\text{Кл}^2}{\text{м}^2\cdot\text{Н}} = 8{,}85\cdot 10^{-12}\,\frac{\text{А}^2\cdot\text{с}^4}{\text{м}^3\cdot\text{кг}}.$$

Элементарный электрический заряд. В природе электрические заряды существуют только в виде заряженных частиц, которые условно считаются простейшими или элементарными. Наличие электрического заряда — неотъемлемое свойство некоторых элементарных частиц. Носителями отрицательных зарядов являются

электроны, положительных зарядов — *протоны*. Заряд всех протонов одинаков и равен минимальному встречающемуся в природе заряду — так называемому *элементарному электрическому заряду* e:

$$e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}\ \text{Кл}.$$

Заряд всех электронов также одинаков и по абсолютной величине равен элементарному электрическому заряду. Атом любого элемента содержит столько же электронов в электронной оболочке, сколько протонов находится в его ядре, и потому атом электрически нейтрален.

Нейтральными будут молекулы и макроскопические тела, построенные из атомов. Всякий процесс электризации тел связан с разделением электрических зарядов, когда на одном из тел (или части тела) появляется избыток положительных зарядов, а на другом (или другой части тела) — избыток отрицательных зарядов. Общее число положительных и отрицательных зарядов при этом сохраняется, заряды только перераспределяются между телами. Как правило, электризация связана с переносом электронов, масса которых чрезвычайно мала ($m_e \approx 10^{-30}$ кг). Поэтому можно перенести на макроскопическое тело или убрать с него огромное число электронов без заметного изменения его массы, сообщив телу при этом значительный электрический заряд.

Закон сохранения электрического заряда. Сохранение электрического заряда представляет собой важнейшее известное из опыта его свойство: в изолированной системе алгебраическая сумма зарядов всех тел остается неизменной. Справедливость этого закона подтверждается не только в процессах электризации, но и в наблюдениях над огромным числом рождений, уничтожений и взаимных превращений элементарных частиц.

Закон сохранения электрического заряда — один из самых фундаментальных законов природы. Не известно ни одного случая его нарушения. Даже в тех случаях, когда происходит рождение новой заряженной частицы, одновременно обязательно рождается другая частица с равным и противоположным по знаку зарядом. «Зарядить» элементарную частицу, т. е. изменить ее заряд, нельзя — мы просто получим при этом другую частицу.

Электрический заряд элементарной частицы не зависит ни от выбора системы отсчета, ни от состояния движения частицы, ни от ее взаимодействия с другими частицами. Поэтому заряд макроскопического тела не зависит ни от движения составляющих его частиц, ни от движения тела как целого.

Задачи

1. *Электрон в атоме водорода.* В планетарной модели атома предполагается, что электрон движется вокруг ядра под действием кулоновской силы притяжения к ядру. Считая, что движение электрона подчиняется законам

классической механики, определите скорость v электрона на круговой орбите радиуса $r = 0{,}5 \cdot 10^{-10}$ м в атоме водорода.

Решение. Когда электрические заряды движутся медленно, т. е. их скорость много меньше скорости света, взаимодействие между ними в первом приближении будет таким же, как и между неподвижными зарядами.

При равномерном движении по окружности ускорение частицы направлено к центру окружности и равно v^2/r. Это ускорение сообщает электрону сила притяжения к ядру $F = ke^2/r^2$. По второму закону Ньютона

$$m\,\frac{v^2}{r} = k\,\frac{e^2}{r^2},$$

откуда

$$v = e\sqrt{\frac{k}{m \cdot r}}\,. \qquad (8)$$

Числовое значение v проще найти, используя систему СГСЭ, где $k = 1$. Подставляя в формулу (8) значения $e = 1{,}6 \cdot 10^{-19}$ Кл $= 4{,}8 \cdot 10^{-10}$ ед. СГСЭ, $m = 0{,}9 \cdot 10^{-27}$ г, $r = 0{,}5 \cdot 10^{-8}$ см, находим $v = 2{,}3 \cdot 10^8$ см/с, что на два порядка меньше скорости света. В СИ, где $k = 1/(4\pi\varepsilon_0)$, выражение для скорости электрона имеет вид

$$v = \frac{e}{\sqrt{4\pi\varepsilon_0 m r}}.$$

Вычисление по этой формуле даст, разумеется, то же значение скорости, но выраженное в метрах в секунду, хотя объем вычислений при этом несколько больше.

2. *Заряженные шарики.* Два одинаковых металлических шарика, находящихся на расстоянии, большом по сравнению с их размерами, притягиваются друг к другу, причем известно, что один из них обладает втрое большим зарядом. Как изменится сила их взаимодействия, если шарики привести в соприкосновение, а затем развести на прежнее расстояние?

Решение. Так как сначала шарики притягивались, то они обладали зарядами противоположных знаков. При соприкосновении одинаковых шариков вследствие симметрии полный заряд распределится между ними поровну. Абсолютная величина заряда одного из шариков по условию втрое больше другого. Поэтому после частичной нейтрализации заряда при соприкосновении шариков каждый из них будет иметь заряд одного и того же знака, причем модуль этого заряда равен меньшему из модулей первоначальных зарядов. Отсюда ясно, что шарики будут отталкиваться с силой, втрое меньшей первоначальной силы притяжения.

Почему в условии задачи говорится о том, что размеры шариков малы по сравнению с расстоянием между ними? При решении мы молчаливо опирались на закон Кулона, справедливый для взаимодействия точечных зарядов. Поэтому линейные размеры шариков должны быть малы, чтобы можно было не думать ни о том, что заряды распределены на шариках неравномерно, ни о том, как изменяется это распределение при их перезарядке.

- Какие опыты свидетельствуют о том, что существует два вида электрического заряда?
- Почему в окружающем нас мире макроскопические тела, как правило, электрически нейтральны?

- Объясните принцип действия электроскопа (рис. 2).
- Как зарядить электрометр или электроскоп, используя электризацию трением и электризацию через влияние? Объясните происходящие при этом процессы.
- Опишите, каким образом устанавливается зависимость силы взаимодействия от значения заряда в опытах Кулона, учитывая, что при этом нет независимого способа измерения заряда.
- Поясните, как от выражающей закон Кулона формулы (1) перейти к векторному выражению (2) для силы взаимодействия зарядов.
- Выведите размерность заряда в системе СГСЭ.
- Получите выражение для размерности электрической постоянной ε_0.
- В чем заключается закон сохранения электрического заряда? Может ли измениться заряд отдельных частиц и суммарный электрический заряд при ядерных реакциях и взаимных превращениях элементарных частиц?
- Почему при решении задачи 1 можно не учитывать силу гравитационного притяжения электрона к ядру? Во сколько раз она меньше силы электростатического притяжения?

§ 2. Электрическое поле. Напряженность поля

Наряду с законом Кулона возможно и другое описание взаимодействия электрических зарядов.

Дальнодействие и близкодействие. Закон Кулона, подобно закону всемирного тяготения, трактует взаимодействие зарядов как «действие на расстоянии», или «дальнодействие». Действительно, кулоновская сила зависит лишь от величины зарядов и от расстояния между ними. Кулон был убежден, что промежуточная среда, т. е. «пустота» между зарядами, никакого участия во взаимодействии не принимает.

Такая точка зрения, несомненно, была навеяна впечатляющими успехами ньютоновской теории тяготения, блестяще подтверждавшейся астрономическими наблюдениями. Однако еще сам Ньютон писал: «Непонятно, каким образом неодушевленная косная материя, без посредства чего-либо иного, что нематериально, могла бы действовать на другое тело без взаимного прикосновения». Тем не менее концепция дальнодействия, основанная на представлении о мгновенном действии одного тела на другое на расстоянии без участия какой-либо промежуточной среды, еще долго доминировала в научном мировоззрении.

Идея поля как материальной среды, посредством которой осуществляется любое взаимодействие пространственно удаленных тел, была введена в физику в 30-е годы XIX века великим английским естествоиспытателем М. Фарадеем, который считал, что «материя присутствует везде, и нет промежуточного пространства, не занятого

ею». Фарадей развил последовательную концепцию электромагнитного поля, основанную на идее конечной скорости распространения взаимодействия. Законченная теория электромагнитного поля, облеченная в строгую математическую форму, была впоследствии развита другим великим английским физиком Дж. Максвеллом.

По современным представлениям электрические заряды наделяют окружающее их пространство особыми физическими свойствами — создают *электрическое поле.* Основным свойством поля является то, что на находящуюся в этом поле заряженную частицу действует некоторая сила, т. е. взаимодействие электрических зарядов осуществляется посредством создаваемых ими полей. Поле, создаваемое *неподвижными зарядами*, не изменяется со временем и называется *электростатическим.* Для изучения поля необходимо найти его физические характеристики. Рассматривают две такие характеристики — силовую и энергетическую.

Напряженность электрического поля. Для экспериментального изучения электрического поля в него нужно поместить пробный заряд. Практически это будет какое-то заряженное тело, которое, во-первых, должно иметь достаточно малые размеры, чтобы можно было судить о свойствах поля в определенной точке пространства, и, во-вторых, его электрический заряд должен быть достаточно малым, чтобы можно было пренебречь влиянием этого заряда на распределение зарядов, создающих изучаемое поле.

На пробный заряд, помещенный в электрическое поле, действует сила, которая зависит как от поля, так и от самого пробного заряда. Эта сила тем больше, чем больше пробный заряд. Измеряя силы, действующие на разные пробные заряды, помещенные в одну и ту же точку, можно убедиться, что отношение силы к пробному заряду уже не зависит от величины заряда. Значит, это отношение характеризует само поле. Силовой характеристикой электрического поля является *напряженность* $\mathbf{E}$ — векторная величина, равная в каждой точке отношению силы $\mathbf{F}$, действующей на пробный заряд $q_{\text{пр}}$, помещенный в эту точку, к заряду $q_{\text{пр}}$:

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_{\text{пр}}}. \tag{1}$$

Другими словами, напряженность поля $\mathbf{E}$ измеряется силой, действующей на единичный положительный пробный заряд. В общем случае напряженность поля разная в разных точках. Поле, в котором напряженность во всех точках одинакова как по модулю, так и по направлению, называется *однородным.*

Зная напряженность электрического поля, можно найти силу, действующую на любой заряд q, помещенный в данную точку. В соответствии с (1) выражение для этой силы имеет вид

$$\mathbf{F} = q \cdot \mathbf{E}. \tag{2}$$

Как же найти напряженность поля в какой-либо точке?

Напряженность электрического поля, создаваемого точечным зарядом, можно рассчитать с помощью закона Кулона. Будем рассматривать точечный заряд q как источник электрического поля. Этот заряд действует на расположенный на расстоянии r от него пробный заряд $q_{\text{пр}}$ с силой, модуль которой равен

$$F = k\,\frac{|q|\cdot|q_{\text{пр}}|}{r^2}. \tag{3}$$

Поэтому в соответствии с (1), разделив это выражение на $|q_{\text{пр}}|$, получаем модуль E напряженности поля в точке, где расположен пробный заряд, т. е. на расстоянии r от заряда q:

$$E = k\,\frac{|q|}{r^2}. \tag{4}$$

Таким образом, напряженность поля точечного заряда убывает с расстоянием обратно пропорционально квадрату расстояния или, как говорят, по закону обратных квадратов. Такое поле называют *кулоновским*. При приближении к создающему поле точечному заряду напряженность поля точечного заряда неограниченно возрастает: из (4) следует, что $E \to \infty$ при $r \to 0$.

Коэффициент k в формуле (4) зависит от выбора системы единиц. В СГСЭ $k = 1$, а в СИ $k = 1/(4\pi\varepsilon_0)$. Соответственно формула (4) записывается в одном из двух видов:

$$E = \frac{|q|}{r^2}\ \text{(СГСЭ)} \quad \text{или} \quad E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,\frac{|q|}{r^2}\ \text{(СИ)}. \tag{4а}$$

Единица напряженности в СГСЭ специального названия не имеет, а в СИ она называется «вольт на метр» (В/м).

Вследствие изотропности пространства, т. е. эквивалентности всех направлений, электрическое поле уединенного точечного заряда сферически-симметрично. Это обстоятельство проявляется в формуле (4) в том, что модуль напряженности поля зависит только от расстояния r до заряда, создающего поле. Вектор напряженности $\mathbf{E}$ имеет радиальное направление: он направлен от создающего поле заряда q, если это положительный заряд (рис. 6*а*, *в*), и к создающему поле заряду q, если этот заряд отрицательный (рис. 6*б*).

Выражение для напряженности поля точечного заряда можно записать в векторном виде. Начало координат удобно поместить в точку, где находится заряд, создающий поле. Тогда напряженность поля в любой точке, характеризуемой радиусом-вектором $\mathbf{r}$, дается выражением

$$\mathbf{E} = k\,\frac{|q|}{r^3}\,\mathbf{r}. \tag{5}$$

В этом можно убедиться, сопоставив определение (1) вектора напряженности поля с формулой (2) § 1, либо отталкиваясь непосред-

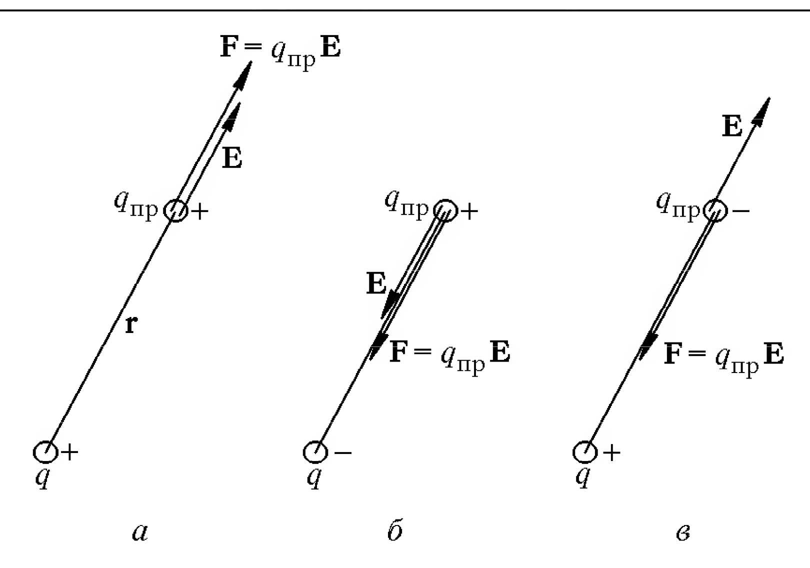


Рис. 6. Напряженность **E** поля, создаваемого зарядом q, и сила **F**, действующая на пробный заряд $q_{пр}$

ственно от формулы (4) и учитывая сформулированные выше соображения о направлении вектора **E**.

Принцип суперпозиции. Как найти напряженность электрического поля, создаваемого произвольным распределением зарядов?

Опыт показывает, что электрические поля удовлетворяют *принципу суперпозиции*. Напряженность поля, создаваемого несколькими зарядами, равна векторной сумме напряженностей полей, создаваемых каждым зарядом в отдельности:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \ldots = \sum_i \mathbf{E}_i. \qquad (6)$$

Принцип суперпозиции фактически означает, что присутствие других электрических зарядов никак не сказывается на поле, создаваемом данным зарядом. Такое свойство, когда отдельные источники действуют независимо и их действия просто складываются, присуще так называемым *линейным* системам, и само такое свойство физических систем называется линейностью. Происхождение этого названия связано с тем, что такие системы описываются линейными уравнениями (уравнениями первой степени).

Подчеркнем, что справедливость принципа суперпозиции для электрического поля не является логической необходимостью или чем-то само собой разумеющимся. Этот принцип представляет собой обобщение опытных фактов.

Принцип суперпозиции позволяет рассчитать напряженность поля, создаваемого любым распределением неподвижных электрических зарядов. В случае нескольких точечных зарядов рецепт расчета результирующей напряженности очевиден. Любой неточечный заряд можно мысленно разбить на такие малые части, чтобы каждую из них можно было рассматривать как точечный заряд. Напряженность электрического поля в произвольной точке находится как

векторная сумма напряженностей, создаваемых этими «точечными» зарядами. Соответствующие расчеты значительно упрощаются в тех случаях, когда в распределении создающих поле зарядов имеется определенная симметрия.

Линии напряженности. Наглядное графическое изображение электрических полей дают линии напряженности или *силовые линии.*

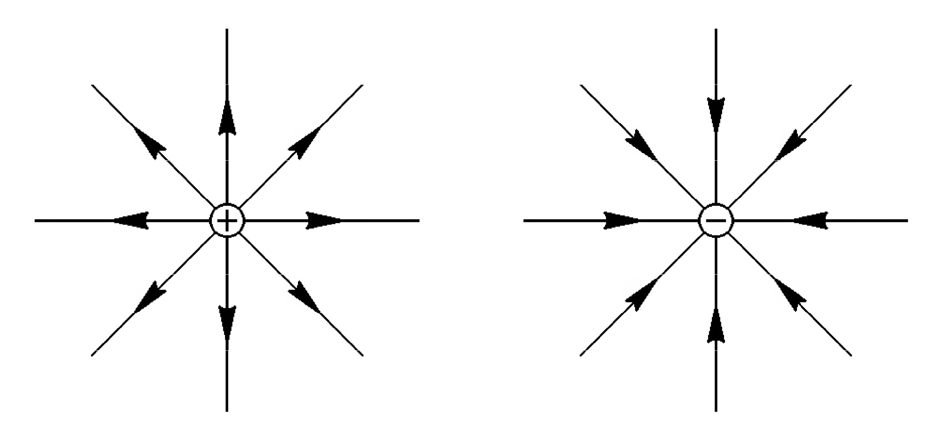


Рис. 7. Линии напряженности поля положительного и отрицательного точечных зарядов

Эти линии электрического поля проводятся таким образом, чтобы в каждой точке касательная к линии совпадала по направлению с вектором напряженности в этой точке. Иначе говоря, в любом месте вектор напряженности направлен по касательной к силовой линии, проходящей через эту точку. Силовым линиям приписывают направление: они выходят из положительных зарядов или приходят из бесконечности. Они либо оканчиваются на отрицательных зарядах, либо уходят в бесконечность. На рисунках это направление указывают стрелками на силовой линии.

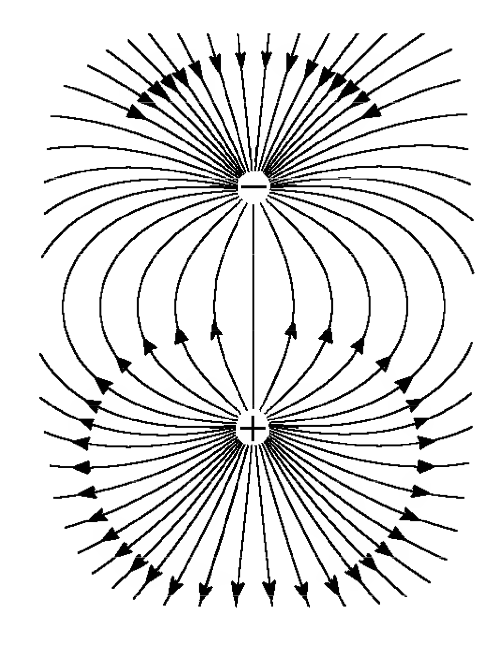


Рис. 8. Линии напряженности поля разноименных одинаковых зарядов

Силовую линию можно провести через любую точку электрического поля. Линии проводят гуще в тех местах, где напряженность поля больше, и реже там, где она меньше. Таким образом, густота силовых линий дает представление о модуле напряженности.

На рис. 7 показаны силовые линии поля уединенного положительного и отрицательного точечных зарядов. Из симметрии очевидно, что это радиальные прямые, распределенные с одинаковой густотой по всем направлениям.

Более сложный вид имеет картина линий поля, создаваемого двумя зарядами противоположных знаков. Такое поле, очевидно,

обладает осевой симметрией: вся картина остается неизменной при повороте на любой угол вокруг оси, проходящей через заряды. Когда модули зарядов одинаковы, картина линий также симметрична относительно плоскости, проходящей перпендикулярно соединяющему их отрезку через его середину (рис. 8). В этом случае силовые линии выходят из положительного заряда и все они оканчиваются на отрицательном, хотя на рис. 8 нельзя показать, как замыкаются уходящие далеко от зарядов линии.

§ 3. Теорема Гаусса

Закон взаимодействия электрических зарядов — закон Кулона — можно сформулировать иначе, в виде так называемой *теоремы Гаусса.* Теорема Гаусса получается как следствие закона Кулона и принципа суперпозиции. Доказательство основывается на обратной пропорциональности силы взаимодействия двух точечных зарядов квадрату расстояния между ними. Поэтому теорема Гаусса применима к любому физическому полю, где действует закон обратных квадратов и принцип суперпозиции, например к гравитационному полю.

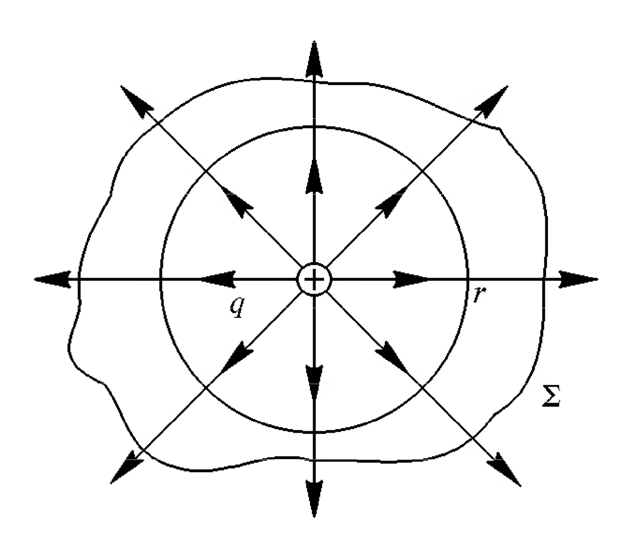


Рис. 9. Линии напряженности электрического поля точечного заряда, пересекающие замкнутую поверхность Σ

Для того чтобы сформулировать теорему Гаусса, вернемся к картине силовых линий электрического поля неподвижного точечного заряда. Силовые линии уединенного точечного заряда представляют собой симметрично расположенные радиальные прямые (рис. 7). Можно провести любое число таких линий. Обозначим полное их число через N. Тогда густота силовых линий на расстоянии r от заряда, т. е. число линий, пересекающих единицу поверхности сферы радиуса r, равна $N/(4\pi r^2)$. Сравнивая это соотношение с выражением для напряженности поля точечного заряда (4), видим, что густота линий пропорциональна напряженности поля. Мы можем сделать эти величины численно равными, надлежащим образом выбрав полное число силовых линий N:

$$\frac{N}{4\pi r^2} = k\,\frac{|q|}{r^2}, \tag{7}$$

откуда

$$N = 4\pi k|q|. \tag{8}$$

Таким образом, поверхность сферы любого радиуса, охватывающей точечный заряд q, пересекает одно и то же число $4\pi k|q|$ силовых линий. Это значит, что силовые линии *непрерывны*: в промежутке между любыми двумя концентрическими сферами разных радиусов ни одна из линий не обрывается и не добавляется ни одной новой. Поскольку силовые линии непрерывны, то такое же число $N = 4\pi k|q|$ силовых линий пересекает любую замкнутую поверхность $\sum$ (рис. 9), охватывающую заряд q.

Силовые линии имеют направление. В случае положительного заряда они выходят наружу из окружающей заряд замкнутой поверхности, как показано на рис. 9. В случае отрицательного заряда они входят внутрь поверхности. Если число выходящих линий считать положительным, а входящих — отрицательным, то в формуле (8) можно опустить знак модуля у заряда и записать ее в виде

$$N = 4\pi kq. \qquad (9)$$

Поток напряженности. Введем теперь понятие *потока вектора напряженности* поля через поверхность. Произвольное поле можно мысленно разбить на малые области, в которых напряженность меняется по модулю и направлению столь мало, что в пределах этой области поле можно считать однородным. В каждой такой области силовые линии представляют собой параллельные прямые и имеют постоянную густоту.

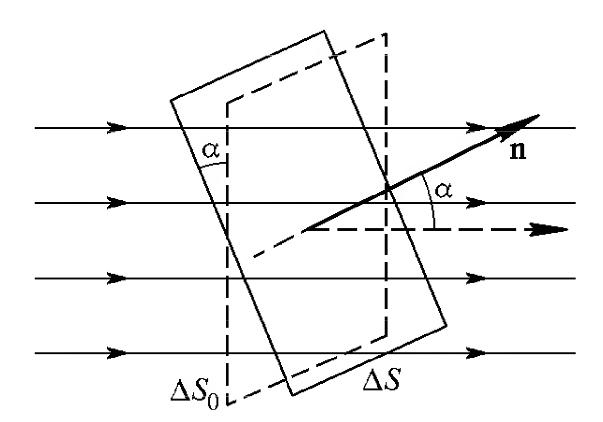


Рис. 10. К определению потока вектора напряженности поля через площадку ΔS

Рассмотрим, какое число ΔN силовых линий пронизывает малую площадку ΔS, направление нормали **n** к которой образует угол α с направлением линий напряженности (рис. 10). Пусть ΔS_0 — проекция ΔS на плоскость, перпендикулярную силовым линиям. Так как число линий, пересекающих ΔS и ΔS_0, одинаково, а густота линий, согласно принятому условию, равна модулю напряженности поля E, то

$$\Delta N = E\Delta S_0 = E\,\Delta S\cos\alpha.$$

Величина $E\cos\alpha$ представляет собой проекцию вектора $\mathbf{E}$ на направление нормали **n** к площадке ΔS:

$$E\cos\alpha = E_n.$$

Поэтому число силовых линий ΔN, пересекающих площадку ΔS, равно

$$\Delta N = E_n\Delta S. \qquad (10)$$

Произведение $E_n \Delta S$ носит название потока напряженности поля через поверхность ΔS. Формула (10) показывает, что поток вектора **E** через поверхность ΔS равен числу силовых линий, пересекающих эту поверхность. Отметим, что поток вектора напряженности, как и

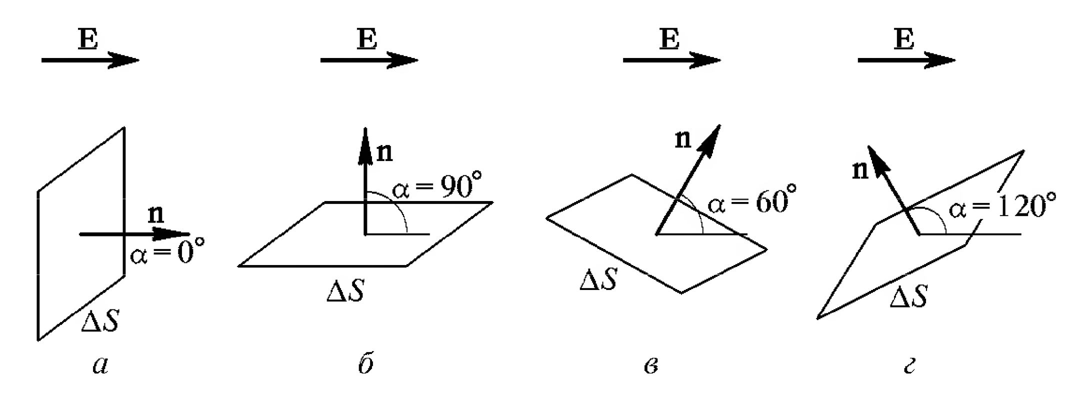


Рис. 11. Поток ΔN вектора напряженности **E** через площадку ΔS

число проходящих через поверхность силовых линий, есть скаляр. Зависимость потока от ориентации площадки ΔS относительно силовых линий иллюстрируется рис. 11: *а*) $\Delta N = E\Delta S$, *б*) $\Delta N = 0$, *в*) $\Delta N = (E/2)\Delta S > 0$, *г*) $\Delta N = -(E/2)\Delta S < 0$.

Поток напряженности поля через произвольную поверхность представляет собой сумму потоков через элементарные площадки, на которые можно разбить эту поверхность. В силу соотношений (9) и (10) можно утверждать, что поток напряженности поля точечного заряда q через любую охватывающую заряд замкнутую поверхность Σ (см. рис. 9), как число выходящих из этой поверхности силовых линий равен $4\pi kq$. При этом вектор нормали к элементарным площадкам замкнутой поверхности следует направлять наружу. Если заряд внутри поверхности отрицателен, то силовые линии входят внутрь этой поверхности и связанный с зарядом поток вектора напряженности поля также отрицателен.

Если внутри замкнутой поверхности находится несколько зарядов, то в соответствии с принципом суперпозиции будут складываться потоки напряженностей их полей. Полный поток будет равен $4\pi kq$, где под q следует понимать алгебраическую сумму всех зарядов, находящихся внутри поверхности.

Если внутри замкнутой поверхности электрических зарядов нет или их алгебраическая сумма равна нулю, то полный поток напряженности поля через эту поверхность равен нулю: сколько силовых линий входит в объем, ограниченный поверхностью, столько же и выходит наружу.

Теперь можно окончательно сформулировать теорему Гаусса: поток N вектора напряженности электрического поля **E** в вакууме через любую замкнутую поверхность пропорционален полному заряду q, находящемуся внутри этой поверхности. Математически теорема Гаусса выражается той же формулой (9), где под q понимается алгебраическая сумма зарядов. В абсолютной электростатической сис-

теме единиц СГСЭ коэффициент $k = 1$ и теорема Гаусса записывается в виде

$$N = 4\pi q. \tag{11}$$

В СИ $k = 1/(4\pi\varepsilon_0)$ и поток напряженности через замкнутую поверхность выражается формулой

$$N = q/\varepsilon_0. \tag{12}$$

Теорема Гаусса широко используется в электростатике. В некоторых случаях с ее помощью легко рассчитываются поля, создаваемые симметрично расположенными зарядами.

Поля симметричных источников. Применим теорему Гаусса для расчета напряженности электрического поля равномерно заряженного по поверхности шара радиуса R. Будем для определенности считать его заряд q положительным. Распределение зарядов, создающих поле, обладает сферической симметрией. Поэтому такой же симметрией обладает и поле. Силовые линии такого поля направлены по радиусам, а модуль напряженности одинаков во всех точках, равноудаленных от центра шара.

Для того чтобы найти напряженность поля $E(r)$ на расстоянии r от центра шара, проведем мысленно концентрическую с шаром сферическую поверхность радиуса r. Поскольку во всех точках этой сферы напряженность поля направлена перпендикулярно ее поверхности и одинакова по модулю, то поток напряженности просто равен произведению напряженности поля на площадь поверхности сферы:

$$N = E(r) \cdot 4\pi r^2. \tag{13}$$

Но эту величину можно выразить и с помощью теоремы Гаусса. Если нас интересует поле вне шара, т. е. при $r > R$, то, например, в СИ $N = q/\varepsilon_0$ и, сравнивая с (13), находим

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} \quad (r > R). \tag{14}$$

В системе единиц СГСЭ, очевидно,

$$E = \frac{q}{r^2}. \tag{15}$$

Таким образом, снаружи шара напряженность поля такая же, как у поля точечного заряда q, помещенного в центр шара. Если же интересоваться полем внутри шара, т. е. при $r < R$, то $N = 0$, так как весь распределенный по поверхности шара заряд находится вне мысленно проведенной нами сферы. Поэтому поле внутри шара отсутствует:

$$E = 0 \qquad (r < R).$$

Аналогично с помощью теоремы Гаусса можно рассчитать электростатическое поле, создаваемое бесконечной заряженной плоско-

стью с плотностью $+\sigma$, постоянной во всех точках плоскости. По соображениям симметрии можно считать, что силовые линии перпендикулярны плоскости, направлены от нее в обе стороны и имеют всюду одинаковую густоту. Действительно, если бы густота силовых линий в разных точках была различной, то перемещение заряженной плоскости вдоль самой себя приводило бы к изменению поля в этих точках, что противоречит симметрии системы — такой сдвиг не должен изменять поле. Другими словами, поле бесконечной равномерно заряженной плоскости является *однородным*.

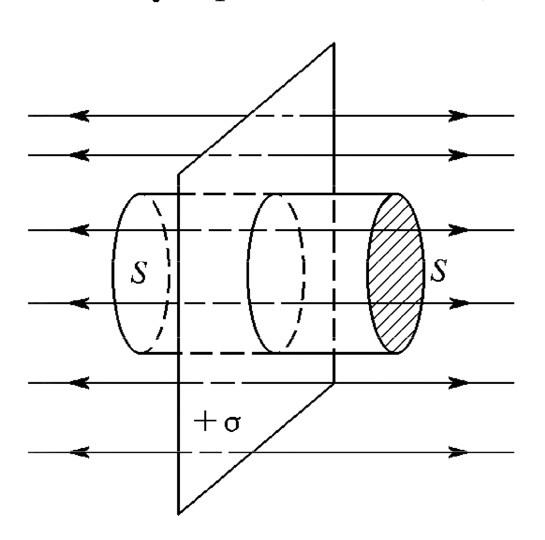


Рис. 12. К вычислению напряженности поля равномерно заряженной плоскости

В качестве замкнутой поверхности для применения теоремы Гаусса выберем поверхность цилиндра, построенного следующим образом: образующая цилиндра параллельна силовым линиям, а основания имеют площади S, параллельны заряженной плоскости и лежат по разные стороны от нее (рис. 12). Поток напряженности поля через боковую поверхность равен нулю, поэтому полный поток через замкнутую поверхность равен сумме потоков через основания цилиндра:

$$N = 2ES.$$

По теореме Гаусса этот же поток определяется зарядом той части плоскости, которая лежит внутри цилиндра, и в СИ равен $\sigma S/\varepsilon_0$. Сравнивая эти выражения для потока, находим

$$E = \sigma/(2\varepsilon_0). \qquad (16)$$

В системе СГСЭ напряженность поля равномерно заряженной бесконечной плоскости дается формулой

$$E = 2\pi\sigma. \qquad (17)$$

Для равномерно заряженной пластины конечных размеров полученные выражения приближенно справедливы в области, находящейся достаточно далеко от краев пластины и не слишком далеко от ее поверхности. Вблизи краев пластины поле уже не будет однородным и его силовые линии искривляются. На очень больших по сравнению с размерами пластины расстояниях поле убывает с расстоянием так же, как поле точечного заряда.

В качестве других примеров полей, создаваемых симметрично распределенными источниками, можно привести поле равномерно заряженной по длине бесконечной прямолинейной нити, поле равномерно заряженного бесконечного кругового цилиндра, поле шара,

равномерно заряженного по объему, и т. п. Теорема Гаусса позволяет во всех этих случаях легко рассчитывать напряженность поля.

Теорема Гаусса дает связь между полем и его источниками, в некотором смысле обратную той, что дает закон Кулона, который позволяет определить электрическое поле по заданным зарядам. С помощью теоремы Гаусса можно определить суммарный заряд в любой области пространства, в которой известно распределение электрического поля.

- В чем различие концепций дальнодействия и близкодействия при описании взаимодействия электрических зарядов? В какой мере эти концепции можно применить к гравитационному взаимодействию?
- Что такое напряженность электрического поля? Что имеют в виду, когда ее называют силовой характеристикой электрического поля?
- Каким образом по картине силовых линий можно судить о направлении и модуле напряженности поля в некоторой точке?
- Могут ли силовые линии электрического поля пересекаться? Аргументируйте свой ответ.
- Нарисуйте качественную картину силовых линий электростатического поля двух зарядов q_1 и q_2 таких, что $q_1 = -3q_2$.
- Поток напряженности электрического поля через замкнутую поверхность выражается разными формулами (11) и (12) в системах единиц СГСЭ и в СИ. Как это увязать с геометрическим смыслом потока, определяемого числом силовых линий, пересекающих поверхность?
- Как использовать теорему Гаусса для нахождения напряженности электрического поля при симметричном распределении создающих его зарядов?
- Как применить формулы (14) и (15) к вычислению напряженности поля шара с отрицательным зарядом?

△ **Теорема Гаусса и геометрия физического пространства.** Посмотрим на доказательство теоремы Гаусса с несколько иной точки зрения. Вернемся к формуле (7), из которой был сделан вывод о том, что через любую окружающую заряд сферическую поверхность проходит одно и то же число силовых линий. Этот вывод связан с тем, что происходит сокращение r^2 в знаменателях обеих частей равенства.

В правой части (7) r^2 возникло из-за того, что сила взаимодействия зарядов, описываемая законом Кулона, обратно пропорциональна квадрату расстояния между зарядами. В левой части появление r^2 связано с *геометрией*: площадь поверхности сферы пропорциональна квадрату ее радиуса.

Пропорциональность площади поверхности квадрату линейных размеров — это отличительная черта евклидовой геометрии в трехмерном пространстве. Действительно, пропорциональность площадей именно квадратам линейных размеров, а не какой-либо иной целой степени, характерно для пространства

трех измерений. То, что этот показатель степени равен точно двум, а не отличается от двойки пусть даже на ничтожно малую величину, свидетельствует о неискривленности этого трехмерного пространства, т. е. о том, что его геометрия именно евклидова.

Таким образом, теорема Гаусса — это проявление свойств физического пространства в фундаментальном законе взаимодействия электрических зарядов.

Идея о тесной связи фундаментальных законов физики со свойствами пространства высказывалась многими выдающимися умами еще задолго до установления самих этих законов. Так, И. Кант за три десятилетия до открытия закона Кулона писал о свойствах пространства: «Трехмерность происходит, по-видимому, оттого, что субстанции в существующем мире действуют одна на другую таким образом, что сила действия обратно пропорциональна квадрату расстояния».

Закон Кулона и теорема Гаусса фактически представляют один и тот же закон природы, выраженный в различных формах. Закон Кулона отражает концепцию дальнодействия, в то время как теорема Гаусса исходит из представления о силовом поле, заполняющем пространство, т. е. из концепции близкодействия. В электростатике источником силового поля является заряд, и связанная с источником характеристика поля — поток напряженности — не может измениться в пустом пространстве, где нет других зарядов. Поскольку поток можно наглядно представлять себе как совокупность силовых линий поля, то неизменность потока проявляется в непрерывности этих линий.

Теорема Гаусса, основанная на обратной пропорциональности взаимодействия квадрату расстояния и на принципе суперпозиции (аддитивности взаимодействия), применима к любому физическому полю, в котором действует закон обратных квадратов. В частности, она справедлива и для гравитационного поля. Ясно, что это не просто случайное совпадение, а отражение того, что и электрическое, и гравитационное взаимодействия разыгрываются в трехмерном евклидовом физическом пространстве. ▲

- На какой особенности закона взаимодействия электрических зарядов основана теорема Гаусса?
- Докажите, основываясь на теореме Гаусса, что напряженность электрического поля точечного заряда обратно пропорциональна квадрату расстояния. Какие свойства симметрии пространства используются в этом доказательстве?
- Каким образом геометрия физического пространства отражается в законе Кулона и теореме Гаусса? Какая особенность этих законов свидетельствует об евклидовом характере геометрии и трехмерности физического пространства?

§ 4. Потенциал электростатического поля. Энергия системы зарядов

Электростатическое поле — это *потенциальное поле*. Понятие о потенциальных силовых полях было введено в курсе механики. Поле называется потенциальным, если работа сил этого поля при перемещении из одной точки в другую не зависит от формы траектории, а определяется только начальным и конечным положениями.

Потенциальным является любое центральное поле, в котором сила зависит только от расстояния до силового центра и направлена по радиусу. Доказательство этого утверждения рассматривалось в курсе механики. Электростатическое поле, создаваемое уединенным точечным зарядом, описывается законом Кулона. Это поле сферически-симметрично и представляет собой частный случай центрального поля. Отсюда следует потенциальный характер электростатического поля точечного заряда.

В соответствии с принципом суперпозиции напряженность электростатического поля, создаваемого любым, сколь угодно сложным распределением неподвижных зарядов, представляет собой векторную сумму напряженностей полей, создаваемых каждым зарядом в отдельности. Сила, действующая на перемещаемый пробный заряд, определяется полной напряженностью поля. Поэтому работа при перемещении пробного заряда равна сумме работ сил, действующих со стороны отдельных точечных зарядов. Работа каждой такой силы не зависит от формы траектории. Поэтому и суммарная работа — работа результирующей силы — также не зависит от траектории, что и доказывает потенциальный характер любого электростатического поля.

Потенциальная энергия. Для заряда в электростатическом поле, как и в случае любого потенциального поля, можно ввести *понятие потенциальной энергии*. Потенциальная энергия заряда в любой точке поля определяется как работа, совершаемая силами поля при перемещении заряда из этой точки в некоторую фиксированную точку, потенциальная энергия в которой принята равной нулю. Можно сказать и иначе: эта потенциальная энергия равна работе, совершаемой внешними силами при переносе заряда из выбранной фиксированной точки в данную точку поля. Выбор фиксированной точки нулевого значения потенциальной энергии произволен. Поэтому потенциальная энергия заряда в поле определена с точностью до некоторой аддитивной постоянной. Такая неоднозначность потенциальной энергии никак не сказывается на физических результатах, поскольку во всех конкретных расчетах имеет значение только изменение энергии при переносе заряда из одной точки поля в другую.

Потенциал электрического поля. Действующая на заряд q сила $\mathbf{F}$ в электрическом поле $\mathbf{E}$ пропорциональна заряду: $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$. Поэтому и совершаемая при некотором перемещении заряда работа, и его

потенциальная энергия также пропорциональны заряду q. Вследствие этого удобно рассматривать потенциальную энергию в расчете на единицу заряда. Возникающая при этом энергетическая характеристика электростатического поля называется *потенциалом.*

Потенциал φ в некоторой точке поля определяется как отношение работы A, совершаемой силами поля при перемещении пробного заряда $q_{\text{пр}}$ из данной точки поля в фиксированную точку, потенциал которой принят равным нулю, к этому заряду:

$$\varphi = A/q_{\text{пр}}. \tag{1}$$

Физический смысл имеет только разность потенциалов между какими-либо точками, а не сами по себе значения потенциалов этих точек.

Потенциал поля точечного заряда. Для электростатического поля точечного заряда удобно в качестве точки с нулевым потенциалом выбрать бесконечно удаленную точку. Тогда выражение для потенциала точки, отстоящей на расстояние r от заряда q, создающего поле, имеет вид

$$\varphi(r) = k\,\frac{q}{r}. \tag{2}$$

Напомним, что $k = 1$ в системе единиц СГСЭ и $k = 1/(4\pi\varepsilon_0)$ в СИ. Соответственно формула (2) записывается в одном из двух видов:

$$\varphi(r) = \frac{q}{r} \ \ (\text{СГСЭ}) \quad \text{или} \quad \varphi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\,k\,\frac{q}{r} \ \ (\text{СИ}). \tag{2a}$$

Подчеркнем, что в формулах (2) и (2а) для потенциала стоит заряд q, создающий поле (а не модуль заряда, как в формулах (4) и (4а) предыдущего параграфа для модуля напряженности поля). Потенциал поля, создаваемого положительным зарядом q, всюду положителен, так как работа сил этого поля при перемещении положительного пробного заряда в бесконечность из любой точки поля положительна. Аналогично, потенциал поля отрицательного заряда всюду отрицателен. Все это, как и сами формулы (2) и (2а), справедливо, разумеется, при выборе точки нулевого потенциала на бесконечности.

Такой же формулой (2) выражается и потенциал поля снаружи равномерно заряженного шара, так как его поле неотличимо от поля такого же точечного заряда, помещенного в центр шара. Во всех точках внутри такого шара, где напряженность поля равна нулю, потенциал одинаков и имеет такое же значение, как и на поверхности шара.

Потенциальная энергия W некоторого заряда q_1, помещенного в электростатическое поле, равна произведению q_1 на потенциал той точки поля, где находится этот заряд:

$$W = q_1\varphi. \tag{3}$$

Если заряд q_1 находится в поле, создаваемом другим точечным зарядом q, то его потенциальная энергия, с учетом (2), имеет вид

$$W = k\,\frac{qq_1}{r}. \qquad (4)$$

При одноименных зарядах q и q_1 , т. е. при отталкивании, потенциальная энергия положительна и убывает при разведении зарядов. При разноименных зарядах, т. е. при притяжении, электростатическая потенциальная энергия, как и потенциальная энергия в гравитационном поле, отрицательна и возрастает при разведении зарядов.

Принцип суперпозиции для потенциала. В соответствии с принципом суперпозиции потенциал произвольной точки поля нескольких зарядов, как следует из определения потенциала, равен алгебраической сумме потенциалов, создаваемых в этой точке всеми зарядами:

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots = \sum_i \varphi_i. \qquad (5)$$

При этом точка нулевого потенциала выбирается общей для всех зарядов.

Работа электрического поля. Напряжение. Работа, совершаемая силами электростатического поля при перемещении некоторого заряда из одной точки в другую, равна произведению переносимого заряда q на *разность потенциалов* $\varphi_1 - \varphi_2$ между начальной и конечной точками:

$$A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2). \qquad (6)$$

Выражение (6) следует из определения потенциала.

Разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ между двумя точками обычно называют *напряжением* между точками (или просто напряжением) U:

$$U = \varphi_1 - \varphi_2. \qquad (7)$$

Как видно из (6), работа сил поля при перемещении заряда из одной точки в другую равна произведению переносимого заряда на напряжение:

$$A_{12} = q(\varphi_1 - \varphi_2) = qU. \qquad (8)$$

Потенциал, разность потенциалов и напряжение измеряются в одних и тех же единицах. В СГСЭ эта единица не имеет специального названия, а в СИ единица напряжения называется *вольт* (В). При перемещении заряда в один кулон между точками с разностью потенциалов один вольт электрические силы совершают работу один джоуль: 1 Дж = 1 Кл · 1 В.

Эквипотенциальные поверхности. Наглядное графическое изображение электростатических полей возможно не только с помощью картины силовых линий, дающей представление о напряженности в каждой точке поля, но и с помощью *эквипотенциальных поверхностей.* Эквипотенциальная поверхность это множество точек, в которых потенциал имеет одно и то же значение. Обычно изображают сечение этих поверхностей какой-либо плоскостью (плоскостью чертежа), поэтому на рисунках они выглядят линиями. Например, для электростатического поля точечного заряда эквипотенциальные поверхности представляют собой концентрические сферы с общим центром в точке, где находится создающий поле заряд. На рис. 13 сечения этих сфер выглядят как концентрические окружности.

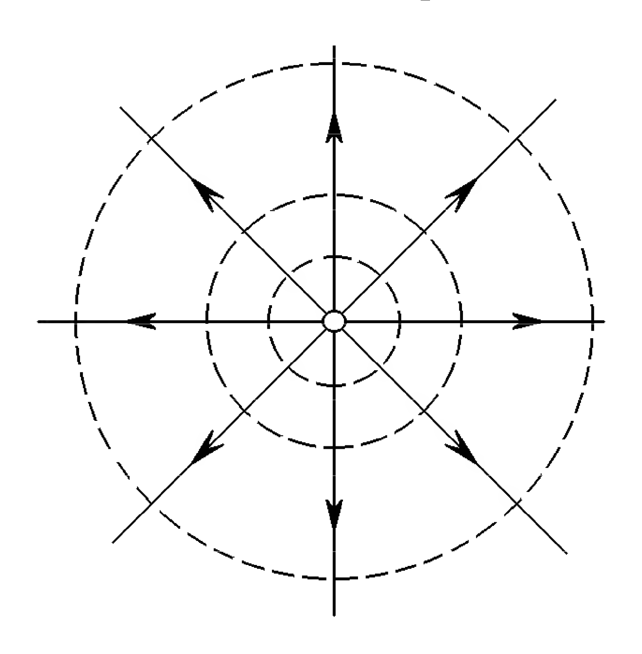


Рис. 13. Линии напряженности и эквипотенциальные поверхности электрического поля точечного зарада

Силовые линии электростатического поля перпендикулярны эквипотенциальным поверхностям. Действительно, если мысленно перемещать пробный заряд по эквипотенциальной поверхности, то работа, как видно из (8), равна нулю. Таким образом, сила электрического поля работы не совершает, а это возможно, если сила перпендикулярна перемещению.

Два способа изображения электростатических полей — силовыми линиями и эквипотенциальными поверхностями — эквивалентны: имея одну из этих картин, можно легко построить другую. Особенно наглядны рисунки, на которых изображены обе эти картины (рис. 14).

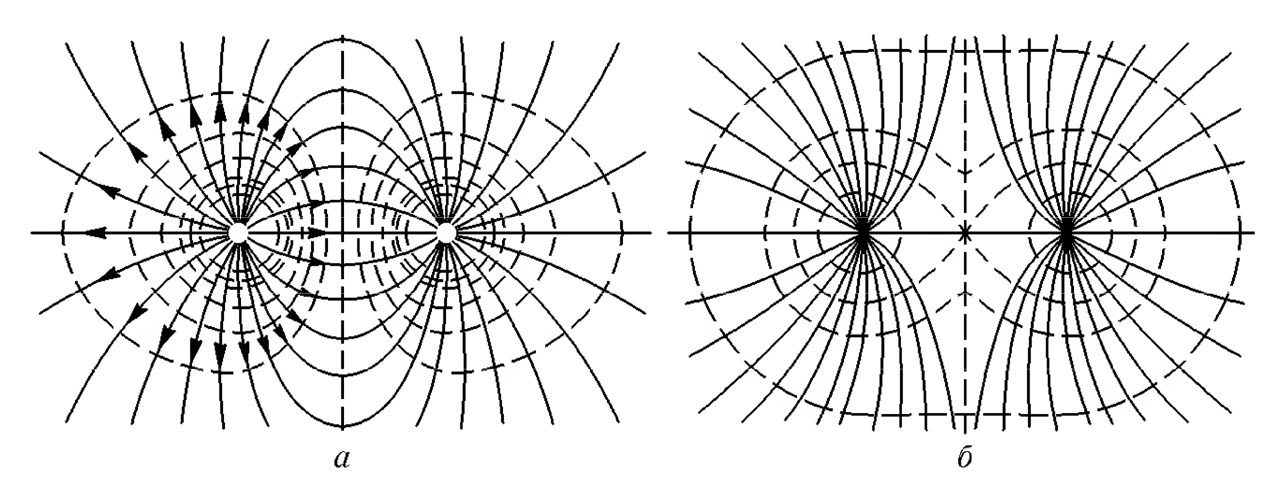


Рис. 14. Линии напряженности и эквипотенциальные поверхности поля разноименных (*а*) и одноименных (*б*) одинаковых по модулю точечных зарядов

Связь напряженности и потенциала. Напряженность электростатического поля и его потенциал связаны друг с другом. Эту связь легко найти, рассматривая работу сил поля при столь малом перемещении Δr пробного заряда, чтобы напряженность поля можно было считать постоянной. С одной стороны, эта работа равна скалярному произведению силы на перемещение, т. е. $q\mathbf{E}\Delta\mathbf{r}$. С другой стороны, эта работа, в соответствии с (8), равна произведению заряда на разность потенциалов, т. е. $q(\varphi_1 - \varphi_2) = -q\,\Delta\varphi$. Знак минус здесь возникает потому, что приращение потенциала $\Delta\varphi$ по определению равно разности значений потенциала в конечной и начальной точках: $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$. Приравнивая оба выражения для работы, получаем

$$\Delta\varphi = -\mathbf{E}\Delta\mathbf{r}. \qquad (9)$$

Скалярное произведение $\mathbf{E}\Delta\mathbf{r}$ можно представить как произведение проекции напряженности E_r на направление вектора перемещения $\Delta\mathbf{r}$ и модуля этого перемещения $|\Delta\mathbf{r}| = \Delta r$:

$$\Delta\varphi = -E_r\Delta r. \qquad (10)$$

Направление перемещения $\Delta\mathbf{r}$ можно выбрать произвольно. Выбирая его вдоль одной из осей координат, из (10) получаем выражение для проекции вектора $\mathbf{E}$ на соответствующую ось:

$$E_x = -\frac{\Delta\varphi}{\Delta x}, \qquad E_y = -\frac{\Delta\varphi}{\Delta y}, \qquad E_z = -\frac{\Delta\varphi}{\Delta z}. \qquad (11)$$

Подчеркнем, что в числителях этих выражений, в соответствии с (9), стоят приращения потенциала при малых перемещениях вдоль соответствующих осей координат.

Энергия системы зарядов. До сих пор мы рассматривали потенциальную энергию некоторого заряда, помещенного в электростатическое поле, создаваемое другими зарядами, расположение которых в пространстве считалось неизменным. Однако по физической природе пробные заряды и заряды — источники поля ничем не отличаются, а потенциальная энергия заряда в поле — это энергия взаимодействия этих зарядов. Поэтому в некоторых случаях бывает удобно придать выражению для потенциальной энергии симметричный вид, чтобы все заряды — и источники поля, и пробные — фигурировали как равноправные. Для двух взаимодействующих точечных зарядов такой симметричный вид выражения потенциальной энергии уже был найден — это формула (4). В ней принимается, что потенциальная энергия равна нулю, когда заряды разведены на бесконечно большое расстояние.

В более сложных случаях, когда рассматривается несколько взаимодействующих зарядов, принимается, что потенциальная энергия взаимодействия равна нулю при каком-либо определенном взаимном расположении этих зарядов. Удобно (хотя и необязательно) в

качестве этой конфигурации выбрать такое расположение, когда все взаимодействующие заряды удалены друг от друга на бесконечные расстояния. Потенциальная энергия системы во всякой иной конфигурации определяется как работа, совершаемая всеми силами взаимодействия при переходе системы из этой конфигурации в положение с нулевой потенциальной энергией. В то же время эта потенциальная энергия равна работе, совершаемой внешними силами при переносе всех зарядов из положения с нулевой потенциальной энергией в заданную конфигурацию.

Энергия взаимодействия системы N неподвижных точечных зарядов q_1, q_2, ..., q_N выражается формулой

$$W_N = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} q_i \varphi_i, \tag{12}$$

где φ_i — потенциал поля, создаваемого всеми зарядами, кроме i-го, в той точке, где находится i-й заряд:

$$\varphi_i = k \sum_{j=1}^{N} \frac{q_j}{r_{ij}}. \tag{13}$$

Здесь r_{ij} — расстояние между i-м и j-м зарядами.

Δ Для доказательства формулы (12) можно использовать метод математической индукции. Прежде всего отметим, что для $N = 2$ эта формула совпадает с полученной ранее формулой (4): сумма по i содержит два слагаемых:

$$W_2 = \frac{1}{2} (q_1\varphi_1 + q_2\varphi_2), \tag{14}$$

где в соответствии с (13)

$$\varphi_1 = k \frac{q_1}{r_{12}}, \qquad \varphi_2 = k \frac{q_2}{r_{12}}.$$

Подставляя эти значения в (14), получаем формулу (4).

Теперь предположим, что формула (12) справедлива для N точечных зарядов, и докажем ее справедливость для системы $(N+1)$ зарядов. При внесении $(N+1)$-го заряда из бесконечности энергия системы изменится на величину, равную работе, совершаемой внешними силами:

$$W_{N+1} = W_N + A. \tag{15}$$

Здесь W_N, согласно предположению, определяется формулой (12), а работа, совершаемая внешними силами при перемещении заряда q_{N+1} из бесконечности в точку поля с потенциалом φ_{N+1}, равна $A = q_{N+1}\varphi_{N+1}$, где

$$\varphi_{N+1} = k \sum_{i=1}^{N} \frac{q_i}{r_{i,N+1}} \tag{16}$$

— потенциал этой точки поля, создаваемый всеми зарядами, кроме q_{N+1}.

После внесения заряда q_{N+1} изменяются потенциалы всех точек поля, кроме той, где находится этот заряд. Потенциал точки, в которой находится i-й заряд, теперь будет равен $\varphi_i{}'$:

$$\varphi_i{}' = \varphi_i + k\,\frac{q_{N+1}}{r_{i,\,N+1}} \quad (i = 1, 2, \ldots, N), \qquad \varphi'_{N+1} = \varphi_{N+1}. \quad (17)$$

Выразим энергию системы $(N+1)$ зарядов (15) через новые значения потенциалов $\varphi_i{}'$ с помощью соотношений (17):

$$W_{N+1} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i\left(\varphi_i{}' - k\,\frac{q_{N+1}}{r_{i,N+1}}\right) + q_{N+1}\varphi'_{N+1}.$$

Сумма произведений q_i на второе слагаемое в скобках в правой части этого равенства, в силу формулы (16), равна $-q_{N+1}\varphi'_{N+1}$. Поэтому

$$W_{N+1} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} q_i\varphi_i{}' - \frac{1}{2}\,q_{N+1}\varphi'_{N+1} + q_{N+1}\varphi'_{N+1} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N+1} q_i\varphi_i{}'.$$

Таким образом, формула (12) для энергии системы точечных зарядов доказана. ▲

- Докажите, что электростатическое поле, создаваемое уединенным точечным зарядом, потенциально.
- Докажите, что поле, создаваемое любым распределением неподвижных электрических зарядов, потенциально.
- Что означает принцип суперпозиции применительно к энергетической характеристике электростатического поля — потенциалу?
- Докажите справедливость формулы (6), рассматривая работу поля при перемещении заряда q из начальной точки *1* в бесконечность, а затем из бесконечности в точку *2*.
- Чему равна работа сил электростатического поля при перемещении заряда по замкнутому контуру?
- Докажите, что поле потенциально, если работа сил этого поля при перемещении по любому замкнутому контуру равна нулю.
- Нарисуйте картину силовых линий и эквипотенциальных поверхностей однородного электростатического поля.
- Может ли существовать электростатическое поле, силовые линии которого представляют собой параллельные прямые с переменной густотой (рис. 15)?

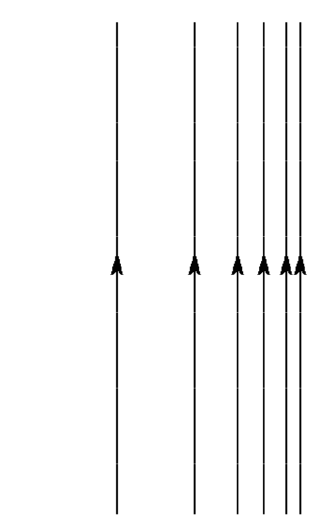


Рис. 15

- В чем различие понятия потенциальной энергии пробного заряда, находящегося в электростатическом поле двух зарядов, и понятия потенциальной энергии всех трех зарядов?

Δ **Вывод формулы $\varphi=kq/r$.** Докажем справедливость формулы (2) для потенциала уединенного точечного заряда. Потенциал в точке P, находящейся на расстоянии r от заряда q, равен работе, совершаемой силами поля при перемещении единичного положительного заряда из точки P в бесконечно удаленную точку. Поскольку сила, действующая на единичный заряд, равна напряженности поля E, то выражение для интересующей нас работы, равной потенциалу в точке P, запишется в виде

$$\varphi = \int \mathbf{E}\, d\mathbf{r}. \tag{18}$$

Интегрирование здесь может выполняться вдоль любого пути, проходящего из точки P в бесконечность, так как работа сил потенциального поля не зависит от формы траектории. Выберем этот путь вдоль прямой, проходящей из заряда через данную точку P на бесконечность. Поскольку напряженность поля $\mathbf{E}$ направлена вдоль этой прямой (от заряда при $q > 0$ и к заряду при $q < 0$), то скалярное произведение $\mathbf{E}\, d\mathbf{r}$ можно записать как

$$\mathbf{E}\, d\mathbf{r} = E_r\, dr = k\,\frac{q}{r^2}\, dr, \tag{19}$$

если начало координат выбрано в точке, где находится заряд q. Интегрирование в (18) теперь выполняется в пределах от r до ∞:

$$\varphi = kq\int_r^{\infty}\frac{dr}{r^2} = -\,kq\,\frac{1}{r}\Big|_r^{\infty} = k\,\frac{1}{r}.$$

О модели точечного заряда. Обратим внимание на то, что и напряженность, и потенциал поля точечного заряда неограниченно возрастают (стремятся к бесконечности) при приближении точки P к тому месту, где расположен создающий поле заряд. Физически это бессмысленно, так как соответствует обращению в бесконечность и силы, действующей на пробный заряд, и его потенциальной энергии. Все это говорит о том, что сама модель точечного заряда имеет ограниченную область применимости.

В какой мере для элементарных частиц можно использовать модель точечного заряда? Эксперименты на больших ускорителях показали, что нуклоны обладают внутренней структурой. Заряд в них распределен некоторым образом по объему, причем не только у протона, но даже и у нейтрона, который в целом электрически нейтрален. Что касается электронов, то для них модель точечного заряда «работает» вплоть до расстояний порядка так называемого классического радиуса электрона $r_e = e^2/mc^2 \approx 3\cdot 10^{-13}$ см.

Напряженность как градиент потенциала. Вернемся теперь к формулам (9)–(11), выражающим напряженность любого электростатического поля через его потенциал. Из формул (11) следует, что проекции вектора **E** напряженности поля на оси координат можно рассматривать как взятые с противоположным знаком производные по соответствующим координатам от потенциала скалярной функции координат $\varphi(x, y, z)$. При вычислении любой из этих производных, например по x, две другие переменные, y и z, нужно считать фиксированными. Такие производные функции нескольких переменных в математике называют *частными производными* и обозначают как $\partial\varphi/\partial x$. Вектор, проекции которого равны частным производным скалярной функции по соответствующим координатам, называется *градиентом* этой скалярной функции. Таким образом, напряженность **E** электрического поля — это взятый со знаком минус градиент потенциала. Записывают это следующим образом:

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \varphi(x, y, z) = -\nabla\varphi(x, y, z). \qquad (20)$$

Здесь ∇ — символический вектор, проекции которого на оси координат — операции дифференцирования:

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z},$$

а **i**, **j**, **k** — орты декартовой системы координат.

Чем быстрее меняется в пространстве потенциал, тем больше модуль его градиента, т. е. модуль напряженности электрического поля. «Смотрит» вектор напряженности в том направлении, в котором потенциал убывает быстрее всего, т. е. перпендикулярно эквипотенциальным поверхностям. Увидеть, что вектор **E** направлен именно таким образом, можно с помощью формулы (9): если из рассматриваемой точки совершить одинаковые по модулю перемещения $\Delta\mathbf{r}$ во всевозможных направлениях, то наибольшее изменение потенциала произойдет тогда, когда это перемещение направлено вдоль вектора **E**. ▲

- На каком свойстве электростатического поля основан выбор пути интегрирования в формуле (18)?
- Почему для поля точечного заряда точку нулевого значения потенциала нельзя выбрать в том месте, где находится сам заряд?
- Объясните, почему напряженность электрического поля направлена в сторону наибыстрейшего убывания потенциала.

§ 5. Расчет электрических полей

Расчеты электрических полей, создаваемых заданным распределением зарядов, основаны на использовании принципа суперпозиции. Эти расчеты существенно упрощаются при наличии какой-либо

симметрии в распределении создающих поле зарядов. Рассмотрим примеры таких расчетов в конкретных задачах.

Задачи

1. *Поле заряженного шара.* Шар радиуса R равномерно заряжен по объему. Полный заряд шара q. Найти напряженность и потенциал электрического поля, создаваемого таким шаром.

Решение. Так как распределение создающих поле зарядов сферически-симметрично, то и создаваемое ими электростатическое поле должно обладать такой же симметрией. Это значит, что потенциал и модуль напряженности зависят только от расстояния r до центра заряженного шара, а вектор напряженности во всех точках имеет радиальное направление. Однако зависимость от r величин $\varphi(r)$ и $E(r)$ будет разной для внешней $(r > R)$ и внутренней $(r < R)$ областей.

Симметрия системы позволяет применить теорему Гаусса для расчета напряженности поля $E(r)$. Для области $r > R$ этот расчет ничем не отличается от описанного в предыдущем параграфе расчета напряженности поля шара, равномерно заряженного по поверхности. Напряженность поля и, следовательно, потенциал, оказываются точно такими же, как у точечного заряда q, помещенного в центр шара:

$$E(r) = k\,\frac{q}{r^2}, \quad \varphi(r) = k\,\frac{q}{r} \quad (r > R). \qquad (1)$$

Для нахождения напряженности поля внутри шара рассмотрим поток напряженности через сферическую поверхность радиуса $r < R$, концентрическую с шаром. Поскольку силовые линии всюду пересекают эту поверхность под прямым углом, то поток N вектора $\mathbf{E}$ через нее равен $E(r)4\pi r^2$. По теореме Гаусса этот же поток пропорционален полному заряду q', находящемуся внутри сферы: $N = 4\pi k q'$. При постоянной плотности заряд пропорционален объему, т. е. $q' = qr^3/R^3$. Поэтому $N = 4\pi k q r^3/R^3$. Приравнивая эти выражения для потока, имеем

$$E \cdot 4\pi r^2 = 4\pi k\,\frac{qr^3}{R^3},$$

откуда

$$E(r) = k\,\frac{qr}{R^3}. \qquad (2)$$

Видно, что напряженность поля внутри равномерно заряженного шара пропорциональна расстоянию r от его центра. На поверхности шара, т. е. при $r = R$, значения напряженности поля $E(r)$, даваемые формулами (1) и (2), совпадают.

Потенциал $\varphi(r)$ для внутренней точки может быть найден как работа сил поля при перемещении единичного заряда из этой точки в бесконечность. Фактически требуется вычислить только работу при перемещении до поверхности, так как работа при перемещении от поверхности в бесконечность равна значению потенциала на поверхности шара: $\varphi(r) = kq/R$. При линейной зависимости силы от расстояния в (2) работа при перемещении из данной точки, находящейся на расстоянии r от центра шара, до поверхности равна

$$\frac{kq}{2R^3}\,(R^2 - r^2).$$

Таким образом, при $r < R$ потенциал имеет вид

$$\varphi(r) = \frac{kq}{2R^3}(R^2 - r^2) + \frac{kq}{R} = \frac{kq}{2R}\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right). \qquad (3)$$

Графики $E(r)$ и $\varphi(r)$ показаны на рис. 16. Оба графика непрерывны, однако при $r = R$ на графике напряженности имеется излом, в то время как на графике потенциала парабола (3) при $r < R$ плавно переходит в гиперболу (1) при $r > R$. Одинаковый наклон касательных к параболе и гиперболе при $r = R$ легко объяснить, если вспомнить о связи напряженности и потенциала: непрерывность наклона касательной к графику $\varphi(r)$ следует из непрерывности $E(r)$.

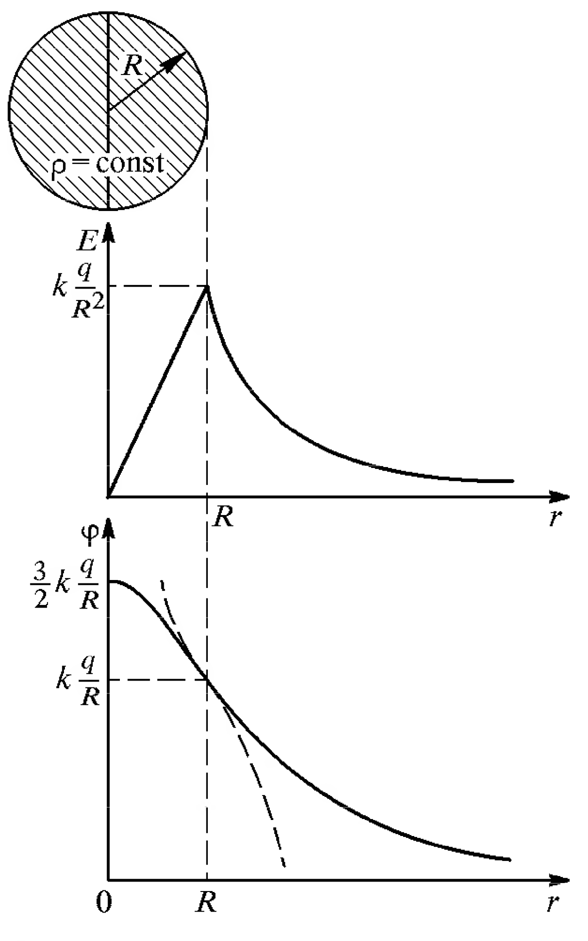


Рис. 16. Напряженность и потенциал поля равномерно заряженного шара

2. *Неустойчивость равновесия зарядов.* Заряды q_1 и $q_2 = -q_1/2$ закреплены на расстоянии l друг от друга. В какой точке создаваемого ими поля будет находиться в равновесии пробный заряд? Устойчиво ли это равновесие?

Решение. Очевидно, что пробный заряд q может быть в равновесии только тогда, когда он расположен на прямой, проходящей через заряды q_1 и q_2 (рис.17). Обозначим через x расстояние от заряда q_1 до точки равновесия. Будем для определенности считать, что заряд q_1 положительный, а q_2 — отрицательный. Показанные на рис. 17 силы, действующие на положительный (рис. 17*а*) и отрицательный (рис.17*б*) пробный заряд q со стороны зарядов q_1 и q_2, в точке равновесия равны по модулю. Расстояние x до этой точки можно найти, приравнивая модули напряженностей $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$ полей зарядов q_1 и q_2:

$$\frac{|q_1|}{x^2} = \frac{|q_2|}{(x-l)^2}. \qquad (4)$$

l $\mathbf{F}_2$ q $\mathbf{F}_1$
q_1 $q_2 = -q_1/2$ *а* x

l $\mathbf{F}_1$ q $\mathbf{F}_2$
q_1 $q_2 = -q_1/2$ *б* x

Рис. 17. Равновесие положительного (*а*) и отрицательного (*б*) пробного заряда q в поле зарядов q_1 и $q_2 = -q_1/2$

Учитывая, что $q_2 = -q_1/2$, приходим к квадратному уравнению для искомого расстояния x:

$$x^2 - 4lx + 2l^2 = 0,$$

откуда $x = l(2 \pm \sqrt{2})$.

Положению равновесия пробного заряда соответствует корень $x = l(2 \pm \sqrt{2}) \approx 3{,}41l$. Второй корень соответствует положению равновесия в случае, когда $q_2 = q_1/2$, так как уравнение (4) справедливо и при одноименных зарядах q_1 и q_2.

Для выяснения вопроса об устойчивости равновесия можно рассмотреть силы, действующие на пробный заряд при его небольшом смещении из положения равновесия. Рассмотрим сначала смещение в направлении, перпенди-

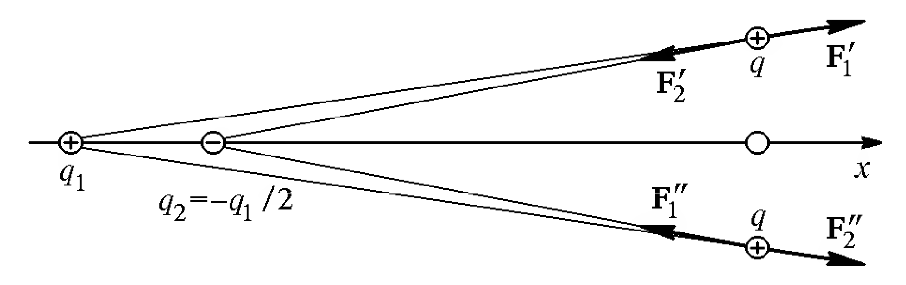
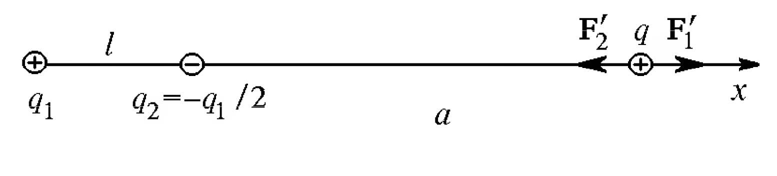


Рис. 18. По отношению к поперечным смещениям равновесие положительного пробного заряда устойчиво, а отрицательного — неустойчиво

кулярном прямой, проходящей через q_1 и q_2. Из рис. 18 видно, что на положительный пробный заряд будет действовать сила (равнодействующая $\mathbf{F}_1'$ и $\mathbf{F}_2'$), направленная к положению равновесия. Так получается потому, что силы $\mathbf{F}_1'$ и $\mathbf{F}_2'$ вблизи точки равновесия почти равны по модулю, но несколько отличаются по направлению. На отрицательный пробный заряд будет действовать сила (равнодействующая $\mathbf{F}_1''$ и $\mathbf{F}_2''$), направленная от положения равновесия.

Отсюда, однако, нельзя сделать вывод о том, что равновесие положительного пробного заряда будет устойчивым, а отрицательного — неустойчивым. В самом деле, если рассмотреть малые смещения из точки равновесия вдоль прямой, проходящей через q_1 и q_2, все будет наоборот: на положительный заряд будет действовать сила, направленная от точки равновесия (рис.19*а*), а на отрицатель-



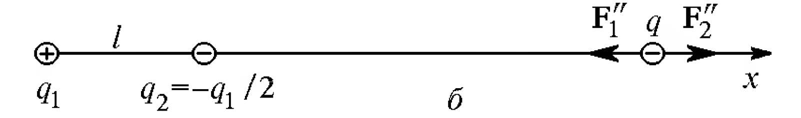


Рис. 19. По отношению к продольным смещениям равновесие положительного пробного заряда неустойчиво (*а*), а отрицательного — устойчиво

ный — к положению равновесия (рис.19*б*). Это легко понять, заметив, что при таком смещении относительное изменение расстояния до q_2 больше, чем до q_1.

Таким образом, в электростатическом поле двух точечных зарядов равновесие пробного заряда не может быть устойчивым: всегда найдутся такие сме-

щения из положения равновесия, при которых на пробный заряд будет действовать сила, «уводящая» его дальше от этого положения.

Подмеченное на этом примере обстоятельство имеет совершенно общий характер: невозможно устойчивое равновесие заряда под действием только электростатических сил.

Устойчивое равновесие в потенциальном поле соответствует минимуму потенциальной энергии. Невозможность устойчивого равновесия пробного заряда в электростатическом поле означает, что потенциал $\varphi(r)$ любого поля, который может быть представлен как сумма членов вида $1/|r - r_i|$, где r_i — радиус-вектор i-го заряда, создающего поле, не имеет минимумов и максимумов на любом конечном расстоянии.

Вопрос. Объясните, почему можно утверждать, что $\varphi(r)$ не может иметь не только минимума, но и максимума.

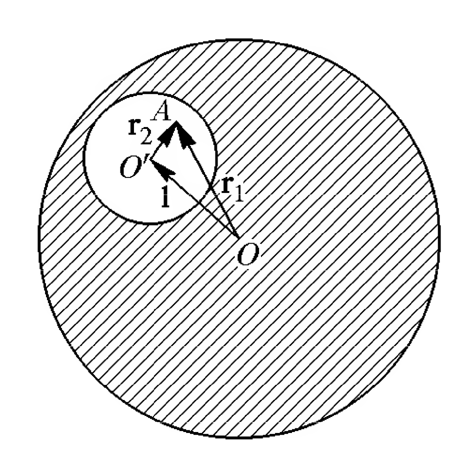


Рис. 20. Нахождение электростатического поля в сферической полости равномерно заряженного шара

3. *Однородное поле в полости.* Докажите, что электростатическое поле внутри сферической полости в равномерно заряженном по объему шаре однородно. Найдите напряженность этого поля, если расстояние от центра шара до центра полости l, а объемная плотность заряда шара ρ.

Решение. Искомую напряженность поля внутри полости проще всего найти с помощью принципа суперпозиции. Идея заключается в следующем. Если бы полости не было, поле $\mathbf{E}_1$ в точке A (рис. 20) создавалось бы всем равномерно заряженным шаром. Такое поле нам известно (см. задачу 1). Но эту напряженность $\mathbf{E}_1$ можно рассматривать как векторную сумму искомой напряженности $\mathbf{E}$ поля, создаваемого шаром с полостью, и напряженности $\mathbf{E}_2$ поля, создаваемого меньшим шаром, после удаления которого и образуется данная полость:

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E} + \mathbf{E}_2. \tag{5}$$

Теперь остается только подставить соответствующие выражения для $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$.

Обозначим через $\mathbf{r}_1$ вектор, проведенный в произвольную точку наблюдения A из центра O заряженного шара, а через $\mathbf{r}_2$ — вектор, проведенный в точку A из центра полости O'. Вектор $\mathbf{l}$ проведен из O в O'. Запишем формулу (2) задачи 1 в векторном виде:

$$\mathbf{E}_1(r_1) = k\,\frac{q}{R^3}\,\mathbf{r}_1, \tag{6}$$

где R — радиус шара. Подставляя сюда заряд q шара (без полости) $q = \frac{4}{3}\pi R^3\rho$, перепишем (6) следующим образом:

$$\mathbf{E}_1(r_1) = k\cdot\frac{4}{3}\,\pi\rho\mathbf{r}_1. \tag{7}$$

Очевидно, что точно такой же формулой выражается напряженность $\mathbf{E}_2$ поля, создаваемого меньшим шаром, после удаления которого образуется полость:

$$\mathbf{E}_2(r_2) = k\cdot\frac{4}{3}\,\pi\rho\mathbf{r}_2. \tag{8}$$

Выражая теперь **E** из (5) как разность $\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2$, с помощью (7) и (8) находим

$$\mathbf{E} = k\cdot\frac{4}{3}\,\pi\rho(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = k\cdot\frac{4}{3}\,\pi\rho\mathbf{l}, \qquad (9)$$

поскольку, как видно из рис. 20, для любой точки наблюдения A внутри полости $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2 = \mathbf{l}$. Из (9) следует, что во всех точках внутри полости напряженность поля **E** одинакова. Это и значит, что поле в полости однородно. Напряженность **E** направлена параллельно линии OO', соединяющей центр шара с центром полости, от O к O' при $\rho > 0$ и от O' к O при $\rho < 0$. Модуль напряженности поля в полости зависит только от плотности заряда ρ и расстояния l и не зависит от радиусов R шара и r полости.

Отметим, что в случае, когда центр полости совпадает с центром шара ($l = 0$), формула (9) дает равное нулю значение E: напряженность поля в любой точке внутри равномерно заряженного шарового слоя равна нулю.

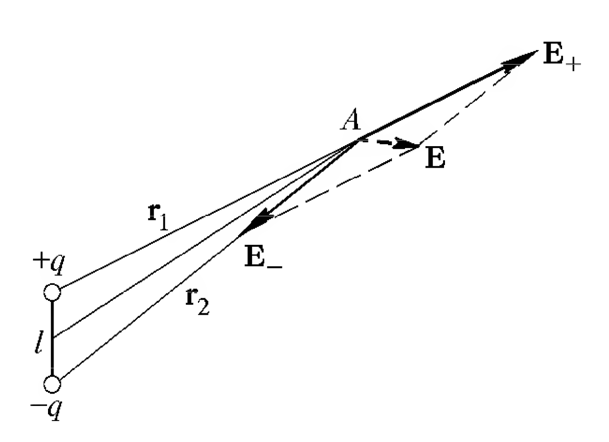


Рис. 21. Напряженность **E** электрического поля диполя представляет собой сумму векторов $\mathbf{E}_+$ и $\mathbf{E}_-$

4. *Электрическое поле диполя.* Найти напряженность и потенциал электрического поля, создаваемого диполем — двумя равными по модулю и разноименными зарядами q и $-q$, находящимися на расстоянии l друг от друга, — в точке, отстоящей на расстояние r, большое по сравнению с размером диполя l.

Р е ш е н и е. Найти электрическое поле, создаваемое парой точечных зарядов, не составляет большого труда. В соответствии с принципом суперпозиции напряженность такого поля равна векторной сумме напряженностей полей, создаваемых каждым зарядом, а потенциал — алгебраической сумме потенциалов. Поэтому, обозначая через r_1 и r_2 расстояния от зарядов $+q$ и $-q$ до точки наблюдения A (рис. 21), имеем для потенциала

$$\varphi = kq\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = kq\,\frac{r_1 - r_2}{r_1 r_2}, \qquad (10)$$

а выражения для модулей соответствующих напряженностей $\mathbf{E}_+$ и $\mathbf{E}_-$ имеют вид

$$E_+ = k\,\frac{q}{r_1^2}, \quad E_- = k\,\frac{q}{r_2^2}; \qquad (11)$$

направления векторов $\mathbf{E}_+$ и $\mathbf{E}_-$ и результирующего вектора **E** показаны на рисунке.

Эти формулы справедливы для любых значений расстояний r_1 и r_2. Смысл задачи заключается в нахождении удобных для дальнейших применений выражений, которые были бы справедливы на больших расстояниях от диполя.

Δ Электрическое действие заряженного тела на расстоянии, большом по сравнению с его размерами, определяется полным зарядом этого тела Q. Чем дальше от тела, тем меньше отличается создаваемое им электрическое поле от поля точечного заря-

да: это поле почти сферически-симметрично, его потенциал убывает с расстоянием как $1/r$, а напряженность — как $1/r^2$.

Если же тело в целом электрически нейтрально, т. е. его полный заряд Q равен нулю, то это вовсе не означает, что оно совсем не создает электрического поля.

В самом деле, электрически нейтральные молекулы вещества именно благодаря электростатическому взаимодействию между собой объединяются и образуют кристаллы или жидкости.

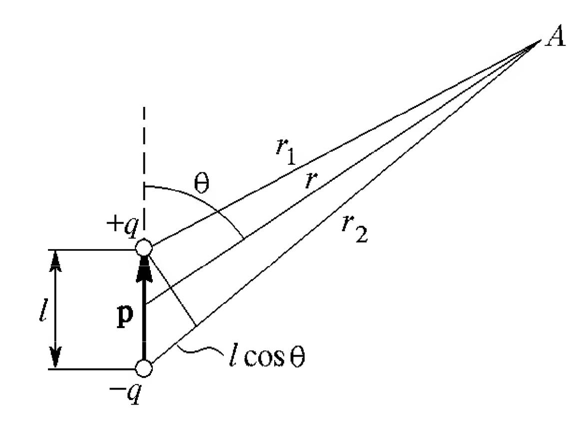


Рис. 22. Вычисление потенциала диполя в точке A

Для расчета электрического поля простейшей электрически нейтральной системы — *диполя* удобно несколько преобразовать выражения (10) и (11). Диполь принято характеризовать дипольным моментом $\mathbf{p}$, модуль которого равен произведению ql, а направление выбирается вдоль оси диполя от отрицательного заряда к положительному (рис. 22). Далее удобно вместо r_1 и r_2 ввести расстояние r от середины диполя и угол θ между вектором дипольного момента и направлением на точку наблюдения. Как видно из рис. 22, при $l/r \ll 1$ разность расстояний $r_1 - r_2$ можно записать в виде

$$r_1 - r_2 \approx l \cos \theta. \tag{12}$$

В то же время произведение $r_1 r_2$ в знаменателе формулы (10) можно заменить на r^2. В результате формула (10) для потенциала принимает вид

$$\varphi = k\,\frac{ql \cos \theta}{r^2} = k\,\frac{p \cos \theta}{r^2}. \tag{13}$$

В отличие от потенциала поля точечного заряда, убывающего как $1/r$, потенциал электрического поля диполя убывает с расстоянием быстрее — как $1/r^2$. Разумеется, поле диполя обладает осевой, а не сферической, симметрией, поэтому его потенциал зависит не только от расстояния r, но и от направления на точку наблюдения, характеризуемого углом θ.

При получении формулы для напряженности удобно представить результирующий вектор $\mathbf{E}$ на рис. 21 не как сумму векторов $\mathbf{E}_+$ и $\mathbf{E}_-$, а как сумму двух взаимно перпендикулярных составляющих, одна из которых, $\mathbf{E}_r$, направлена вдоль радиуса-вектора $\mathbf{r}$, характеризующего положение точки A относительно середины диполя, а другая, $\mathbf{E}_\theta$, перпендикулярна ей (рис. 23). На больших расстояниях от диполя, когда $l/r \ll 1$, векторы $\mathbf{E}_+$ и $\mathbf{E}_-$ направлены почти в противоположные стороны и мало отличаются по

модулю. При приближенном нахождении $\mathbf{E}_r$ нужно учитывать разницу векторов $\mathbf{E}_+$ и $\mathbf{E}_-$ по модулю, но можно пренебречь тем, что они направлены не строго в противоположные стороны. На-

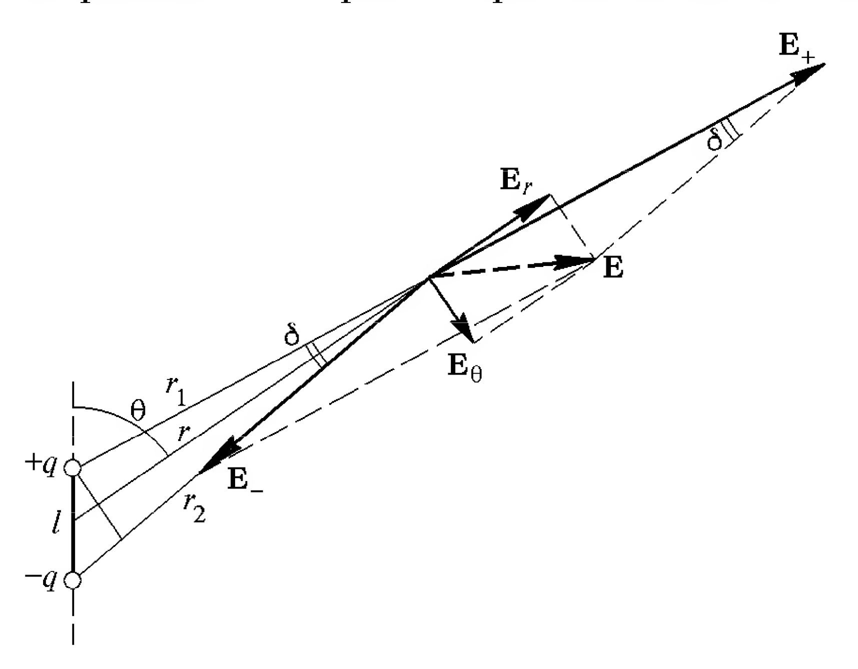


Рис. 23. Напряженность $\mathbf{E}$ поля диполя как сумма векторов $\mathbf{E}_r$ и $\mathbf{E}_\theta$

оборот, при вычислении $\mathbf{E}_\theta$ можно пренебречь различием векторов $\mathbf{E}_+$ и $\mathbf{E}_-$ по модулю, но нужно обязательно учесть их неколлинеарность.

Записав с помощью формул (11) выражение для E_r в виде

$$E_r \approx E_+ - E_- = kq\left(\frac{1}{r_1^2} - \frac{1}{r_2^2}\right) = kq\,\frac{(r_1+r_2)(r_2-r_1)}{(r_1 r_2)^2}, \qquad (14)$$

можно при $l \ll r$, как и при вычислении потенциала, заменить в знаменателе $r_1 r_2$ на r^2, а в числителе — сумму $r_1 + r_2$ на $2r$ и разность $r_2 - r_1$ на $l\cos\theta$. В результате из (14) получаем

$$E_r \approx k\,\frac{2p}{r^3}\cos\theta. \qquad (15)$$

При вычислении E_θ следует учесть, что угол между векторами $\mathbf{E}_+$ и $\mathbf{E}_-$ отличается от π на малую величину δ, для которой, как видно из рис. 23, справедливо

$$\delta \approx \frac{l\sin\theta}{r} \ll 1.$$

Учитывая, что для E_θ можно приближенно написать $E_\theta \approx E_+\delta$, а в выражении для E_+ заменить r_1 на r, окончательно получаем

$$E_\theta \approx k\,\frac{p}{r^3}\sin\theta. \qquad (16)$$

Формулы (15) и (16) позволяют представить себе картину линий напряженности электрического поля диполя (рис. 24). В точках, лежащих на оси диполя, где угол θ равен 0 или π, $E_\theta = 0$ и, следовательно, напряженность поля направлена вдоль оси. Из формулы (15) видно, что направление совпадает с направлением дипольного момента **p** как при $\theta = 0$, так и при

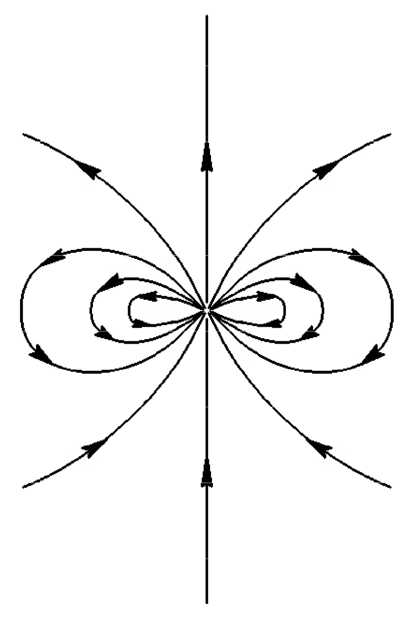


Рис. 24. Картина линий напряженности диполя на большом расстоянии от него

Рис. 25. Нахождение связи модуля перемещения Δs с изменением угла

$\theta = \pi$. Действительно, при $\theta = \pi$ значение E_r отрицательно. Это значит, что там вектор **E** направлен к диполю (рис. 24). Во всех точках плоскости, перпендикулярной оси диполя и проходящей через его середину, обращается в нуль радиальная составляющая E_r напряженности поля. Напряженность поля в этих точках перпендикулярна плоскости и направлена в сторону, противоположную направлению дипольного момента **p**. Картина силовых линий на рис. 24 симметрична относительно оси диполя.

Формулы (15) и (16) для напряженности поля диполя можно получить иначе, используя найденное ранее выражение (13) для потенциала. Для этого воспользуемся тем, что в соответствии с формулой (10) § 4 проекция напряженности поля на любое направление E_s связана с изменением потенциала $\Delta\varphi$ при перемещении вдоль этого направления на расстояние Δs соотношением

$$E_s = -\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}. \qquad (17)$$

Чтобы найти E_r, нужно совершить перемещение вдоль радиус-вектора, т. е. положить в (17) Δs равным Δr. В данном случае

это сводится к дифференцированию выражения (13) для φ по r при фиксированном θ. В результате получаем формулу (15).

Совершенно аналогично, для нахождения E_θ нужно совершить перемещение Δs перпендикулярно радиусу-вектору $\mathbf{r}$ в направлении возрастания угла θ. При этом, как видно из рис. 25, перемещение $\Delta s = r\Delta\theta$ и вычисление по формуле

$$E_\theta = -\frac{1}{r}\frac{\Delta\varphi}{\Delta\theta}$$

с помощью выражения (13) для потенциала приводит к (16).

Формулы (15) и (16) важны потому, что они определяют электрическое поле на большом расстоянии не только для настоящего диполя, т. е. двух точечных разноименных зарядов q и $-q$, но и для любой электрически нейтральной системы зарядов, у которой центры распределения положительных и отрицательных зарядов не совпадают. Другими словами, на достаточно большом расстоянии любое тело с суммарным зарядом $Q = 0$ будет похоже не на точечный заряд, а на диполь. Для него можно подобрать диполь с моментом p так, чтобы создаваемое диполем поле на большом расстоянии было практически эквивалентно полю такого тела со сложным распределением заряда. ▲

- Поясните на качественном уровне (без формул), почему сила, действующая на пробный заряд внутри равномерно заряженного шара, пропорциональна расстоянию до центра шара. Почему в центре шара эта сила равна нулю?
- Почему на графике напряженности поля равномерно заряженного шара есть излом при $r = R$, а на графике потенциала излома нет?
- Рассмотрите характер равновесия пробного заряда в задаче 2, если заряд q_1 отрицательный, а q_2 — положительный, а также для случая, когда q_1 и q_2 одного знака.
- При решении задачи 3 мы опирались на принцип суперпозиции, применяя его не к совокупности точечных зарядов, а к распределенным по объему зарядам. Приведите обоснование такой возможности.
- Почему для напряженности поля, создаваемого в точке A меньшим шаром, можно использовать ту же формулу (7), заменив в ней r_1 на r_2?
- В каких случаях тело со сложным распределением заряда можно на большом расстоянии приближенно заменить точечным зарядом, а в каких — диполем?
- По какому закону убывает с расстоянием напряженность поля и потенциал электрического поля диполя? Сравните с полем точечного заряда.
- Как по-вашему, может ли создавать какое-либо электрическое поле тело, у которого равны нулю и полный заряд, и дипольный момент?

§ 6. Проводники в электрическом поле

Характерным свойством проводников является наличие в них свободных зарядов (электронов или ионов), способных перемещаться по всему объему тела.

Напряженность поля внутри проводника. В равновесии заряды располагаются таким образом, чтобы равнодействующая всех сил, действующих на каждый из зарядов, обращалась в нуль. Поэтому необходимым условием электростатического равновесия является равенство нулю напряженности электрического поля внутри проводника. Если бы внутри проводника существовало электрическое поле, то свободные заряды пришли бы в движение, т. е. равновесие было бы нарушено. Условие $\mathbf{E} = 0$ должно быть выполнено для всех точек внутри проводника независимо от того, заряжен он сам или помещен во внешнее электростатическое поле.

Условие отсутствия электростатического поля внутри проводника приводит к тому, что нескомпенсированные заряды могут располагаться только на его поверхности. В этом легко убедиться с помощью теоремы Гаусса. Рассмотрим произвольную замкнутую поверхность, ограничивающую некоторый объем внутри проводника. Во всех точках этой поверхности напряженность электрического поля равна нулю. Следовательно, равен нулю и поток напряженности поля через эту поверхность. Тогда по теореме Гаусса равен нулю и полный заряд в объеме, ограниченном рассматриваемой поверхностью. Так как поверхность произвольна, то результат применим к любому участку внутри проводника вплоть до его границы. Итак, нескомпенсированные заряды могут располагаться только на поверхности проводника.

Проводники и закон Кулона. Отсутствие зарядов во внутренних частях проводника может быть использовано для проверки закона Кулона на опыте. Если бы в законе Кулона

$$F = k\,\frac{q_1 q_2}{r^2}$$

показатель степени r не равнялся бы точно двум, то не была бы справедлива теорема Гаусса и во внутренних частях заряженного проводника должны были бы находиться заряды. Интересно, что отсутствие зарядов во внутренних частях заряженного металлического проводника было экспериментально установлено Г. Кавендишем за 12 лет до того, как Кулон сформулировал закон взаимодействия точечных зарядов.

Идея опыта Кавендиша ясна из рис. 26. Металлический шар *1* укреплен на изолирующей подставке *2*. Две металлические полусферы *3*, изолированные от земли и от шара, укреплялись на подвижных подставках и могли быть соединены в одну сферу, охва-

тывающую шар *1*. В одной из полусфер имелось малое отверстие, в которое можно было вставлять изолированный проводник *4*, чтобы соединять шар со сферой. Соединенные с шаром полусферы заряжали некоторым зарядом *5*, о величине которого можно было судить по показаниям электрометра. Затем соединяющий шар с полусферами проводник *4* удаляли, полусферы раздвигали и разряжали. После этого электрометр подсоединяли к шару *1* и проверяли, имеется ли на нем какой-либо заряд. Опыт всегда показывал, что на шаре нет никаких следов заряда. Проверку закона Кулона таким способом можно произвести с большей точностью, чем при непосредственном измерении силы взаимодействия между заряженными телами, так как очень трудно создать условия, отвечающие требованию, чтобы заряды были точечными.

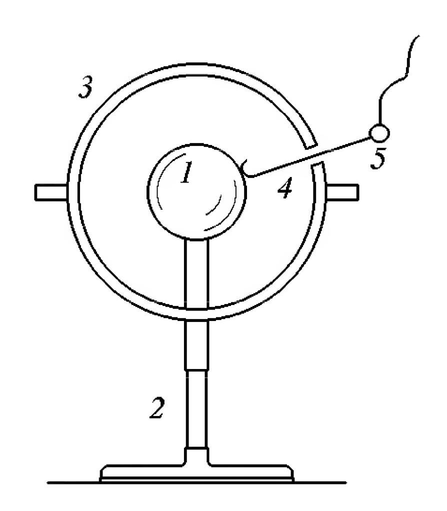


Рис. 26. Опыт Кавендиша

Напряженность поля и поверхностная плотность зарядов. С помощью теоремы Гаусса легко найти выражение для напряженности электрического поля в непосредственной близости от поверхности проводника. Прежде всего отметим, что во всех точках проводника потенциал одинаков и, следовательно, его граница является эквипотенциальной поверхностью, а силовые линии перпендикулярны его поверхности. Возьмем на поверхности проводника настолько малый участок ΔS, чтобы его можно было считать плоским, а поверхностную плотность заряда σ — постоянной. Проведем мысленно малую замкнутую цилиндрическую поверхность, образующие которой перпендикулярны к поверхности проводника, а основания параллельны ΔS (рис. 27). Нижнее основание расположено целиком внутри проводника, где поле отсутствует, а верхнее — в непосредственной близости от поверхности проводника, где силовые линии еще перпендикулярны ей.

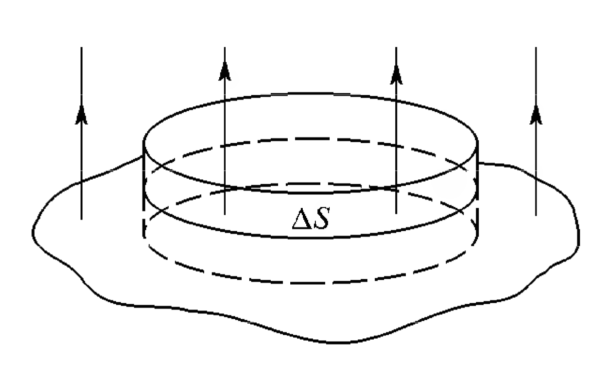


Рис. 27. К вычислению напряженности поля вблизи поверхности проводника

При таком выборе замкнутой поверхности поток напряженности проходит только через верхнее основание и равен $E\Delta S$. По теореме Гаусса

$$E\,\Delta S = 4\pi\sigma k\,\Delta S,$$

откуда

$$E = 4\pi k\sigma. \qquad (1)$$

В СИ $k = 1/(4\pi\varepsilon_0)$ и формула (1) принимает вид

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \qquad (2)$$

В системе единиц СГСЭ $k = 1$ и для напряженности поля вблизи поверхности проводника имеем

$$E = 4\pi\sigma. \qquad (3)$$

Подчеркнем, что формула (1) дает выражение для напряженности полного электростатического поля, существующего вблизи поверхности проводника, независимо от того, создается ли это поле только самим заряженным проводником или еще и другими зарядами. Из (1) видно, что напряженность результирующего поля вблизи поверхности проводника связана только с плотностью зарядов на его поверхности.

Распределение зарядов по поверхности проводника. От чего зависит плотность заряда на поверхности проводника? В случае уединенного заряженного проводящего тела эта плотность тем больше, чем больше полный заряд q проводника. Если это тело — шар, то заряд q распределен по его поверхности равномерно, так что поверхностная плотность всюду одинакова:

$$\sigma = \frac{q}{4\pi R^2}. \qquad (4)$$

Так как напряженность электрического поля, создаваемого равномерно заряженным шаром вблизи его поверхности, равна

$$E = k\,\frac{q}{R^2}, \qquad (5)$$

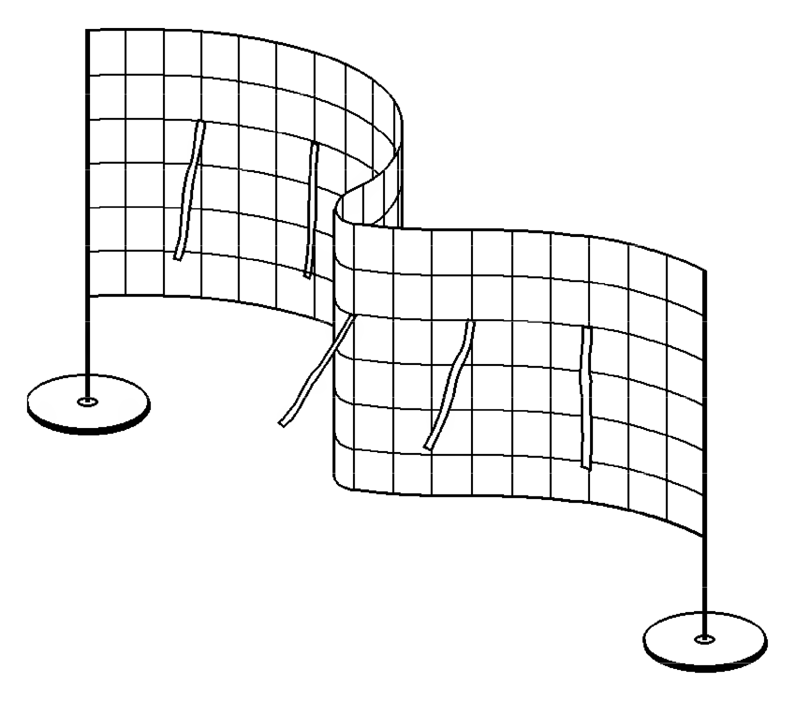
то при подстановке сюда заряда q, выраженного через плотность σ из (4), приходим к формуле (1) $E = 4\pi k\sigma$, справедливой в общем случае, а не только для заряженного шара. Поверхностную плотность заряда σ можно выразить не через заряд q, а через потенциал шара $\varphi = kq/R$. Подставляя $q = \varphi R/k$ в (4), получаем

$$\sigma = \frac{1}{4\pi k}\,\frac{\varphi}{R}. \qquad (6)$$

При заданном потенциале поверхностная плотность заряда σ обратно пропорциональна радиусу шара R.

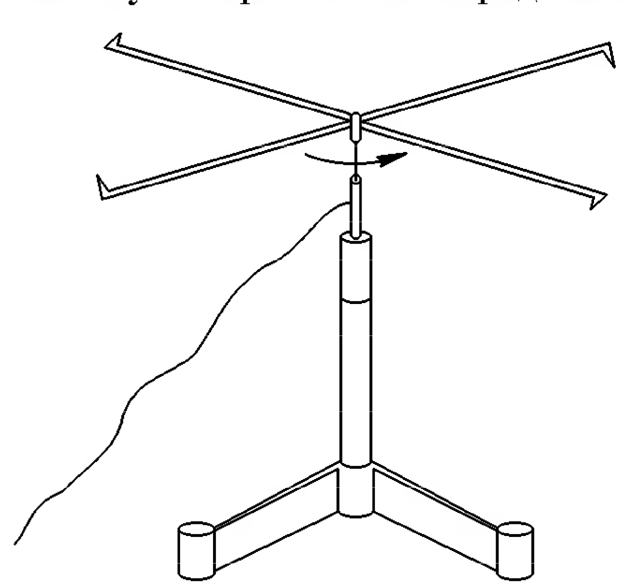
Этот результат имеет общий характер. Какой бы сложной формой ни обладало проводящее тело, потенциал во всех точках одинаков: $\varphi = \text{const}$. Поэтому поверхностная плотность заряда будет больше в тех местах, где меньше R, т. е. где поверхность искривлена сильнее. Очевидно, что в этих же местах будет больше и напряженность электрического поля.

Зависимость напряженности поля от кривизны поверхности можно продемонстрировать в простых опытах. Воспользуемся гибкой ме-


Рис. 28. Листочки сильнее отклоняются на внутренних участках сетки

таллической сеткой (рис. 28), установленной на изолирующих подставках, по обе стороны которой навешены тонкие бумажные листочки. Если сетку зарядить, листочки отклоняются тем сильнее, чем больше напряженность электрического поля вблизи сетки. Пока сетка плоская, листочки расходятся одинаково с обеих сторон. При изгибании сетки листочки с выпуклой стороны отклоняются еще больше, а с вогнутой спадают.

На острие заряженного проводника поверхностная плотность может стать настолько большой, что заряды с него начинают «стекать». Причина этого явления заключается в большой напряженности и неоднородности электрического поля вблизи острия. В сильном поле нейтральные молекулы воздуха поляризуются, т. е. приобретают дипольные моменты из-за относительного смещения положительных и отрицательных зарядов. Так как поле острия неоднородно, эти диполи втягиваются в область, где напряженность поля больше, т. е. притягиваются к острию. Коснувшись острия, молекулы приобретают одноименный с ним заряд и отталкиваются от него. Эта сила отталкивания значительно больше ранее действовавшей силы притяжения, поскольку теперь полный заряд молекулы отличен от нуля.


Рис. 29. Колесо Франклина

Заряженные молекулы удаляются от острия с бóльшими скоростями, чем они приближались к нему, и увлекают за собой другие молекулы воздуха. Возникает так называемый электрический ветер, которым можно даже погасить зажженную свечу. В демонстрационном приборе — колесе Франклина электрический ветер, образующийся при стекании зарядов с остриев, приводит во вращение легкий крест из металлических проволок (рис. 29).

Добиться появления зарядов на поверхности проводника можно, просто помещая его во внешнее электрическое поле.

В качестве примера проводника в электрическом поле рассмотрим большой кусок металла с плоской границей, т. е. фактически заполненное проводником полупространство, в поле точечного заряда q, находящегося на расстоянии l от плоской поверхности (рис. 30). Выясним, каким будет электростатическое поле во всем пространстве.

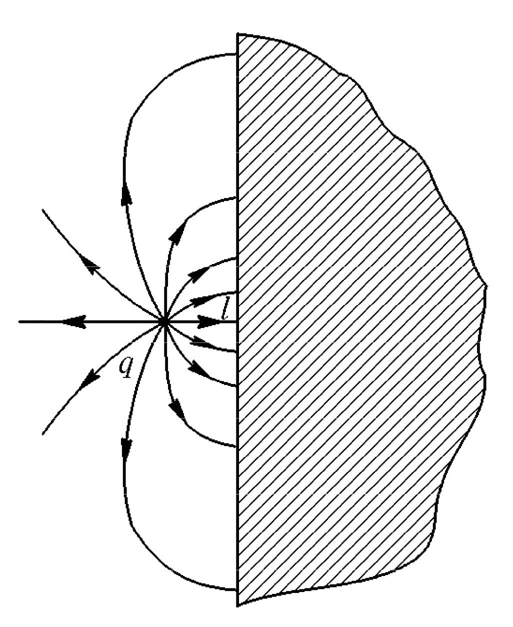


Рис. 30. Электрическое поле точечного заряда, находящегося вблизи поверхности

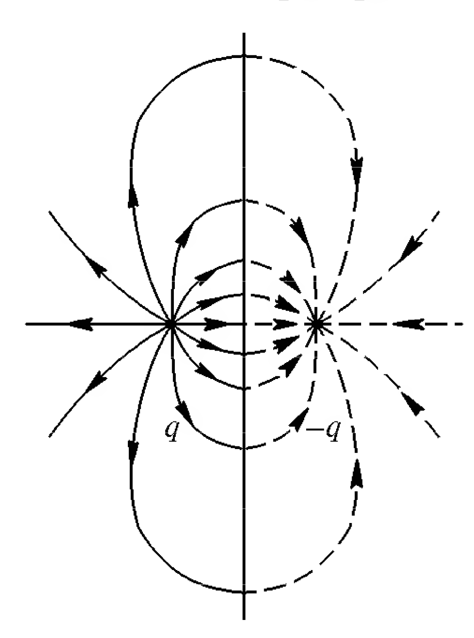


Рис. 31. Слева от плоскости действие индуцированных на плоской границе зарядов эквивалентно действию точечного заряда $-q$

Прежде всего отметим, что внутри куска металла поля нет: справа от плоскости $\mathbf{E} = 0$. Остается найти поле в полупространстве, содержащем заряд. На плоской поверхности проводника индуцируются заряды, поверхностная плотность σ которых связана с напряженностью полного поля вблизи плоскости соотношением (1). По принципу суперпозиции полное поле в любой точке можно рассматривать как сумму полей заряда q и индуцированных на плоскости зарядов. Так как справа от плоскости полное поле равно нулю, то ясно, что суммарное поле всех индуцированных на плоскости зарядов можно заменить для правого полупространства полем одного точечного заряда $-q$, помещенного в ту же точку, что и исходный заряд q. Поле индуцированных зарядов симметрично относительно плоскости. Поэтому поле индуцированных зарядов в левом полупространстве эквивалентно полю точечного заряда $-q$, расположенного справа от плоскости симметрично заряду q (рис. 31). Итак, полное поле в левом полупространстве представляет собой суперпозицию полей, создаваемых зарядом q и зарядом $-q$, расположенным справа от плоскости симметрично заряду q.

Полученный результат можно кратко сформулировать так: действие плоской границы проводника с индуцированными на ней за-

рядами можно заменить действием точечного заряда $-q$, являющегося как бы зеркальным изображением данного заряда q в проводящей плоскости. Поэтому описанный способ нахождения поля носит название *метода изображений*.

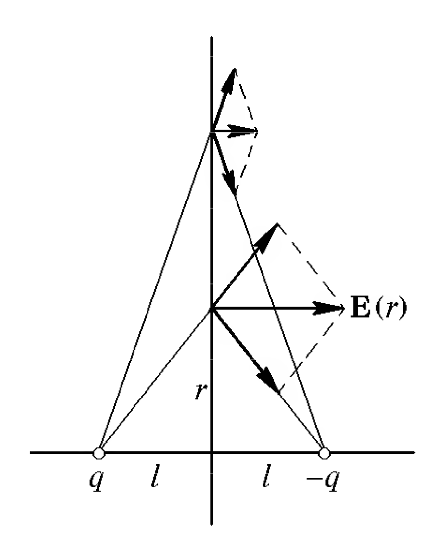


Рис. 32. К расчету поверхностной плотности индуцированных зарядов

Распределение зарядов на поверхности. Зная электрическое поле, можно рассчитать поверхностную плотность индуцированных на проводнике зарядов и силу, действующую на точечный заряд q. Поскольку все силовые линии, выходящие из заряда q, оканчиваются на проводящей плоскости, то полный индуцированный на ней заряд равен $-q$. Разумеется, этот заряд распределен неравномерно.

Поверхностную плотность индуцированных зарядов легко определить с помощью соотношения (1). Напряженность поля вблизи поверхности проводника направлена по нормали к ней. Очевидно, что в рассматриваемом случае поле обладает осевой симметрией: при вращении вокруг линии, соединяющей заряды q и $-q$, картина поля не меняется. Поэтому плотность заряда на поверхности зависит только от расстояния r от оси симметрии: $\sigma = \sigma(r)$. Простой расчет, идея которого понятна из рис. 32, приводит к результату (в единицах СИ):

$$\sigma(r) = E(r) = \frac{ql}{2\pi(r^2 + l^2)^{3/2}}. \tag{7}$$

Какая сила действует на заряд q? Для нахождения силы нужно знать напряженность поля, в котором находится этот заряд. В данном случае это поле создается зарядами, индуцированными на проводнике. Точно такое же поле создавал бы заряд-изображение $-q$. Таким образом, заряд q притягивается к проводнику с такой же силой, как и к заряду $-q$, находящемуся на расстоянии $2l$ от него.

Энергия заряда вблизи проводника. А какую работу нужно совершить, чтобы удалить заряд q на бесконечность? Может показаться, что искомая работа будет такой же, как и при раздвижении на бесконечность зарядов q и $-q$, находящихся на расстоянии $2l$ друг от друга:

$$A = k\,\frac{q^2}{2l}. \tag{8}$$

Однако это неверно! В этом можно убедиться с помощью следующего простого рассуждения. При удалении заряда q от поверхности металла будет удаляться в противоположную сторону и его

«изображение» $-q$, ибо в каждый момент сила, действующая на заряд, определяется зарядом-изображением $-q$, расположенным симметрично q относительно поверхности металла. Поэтому по формуле (8) определяется работа, которая совершается внешними силами, действующими на оба заряда. Нам же необходимо найти работу только одной из этих сил, действующей на заряд q: ведь на самом деле никакого заряда $-q$ нет, а есть заряды, индуцированные на поверхности металла, которые при удалении заряда q растекаются по эквипотенциальной поверхности, так что при их перемещении никакой работы не совершается.

Таким образом, интересующая нас работа A' будет в два раза меньше, чем работа A в (8):

$$A' = \frac{1}{2} A = k \frac{q^2}{4l}. \tag{9}$$

Энергия системы точечных зарядов и проводников. Расчитать эту работу можно и с помощью общей формулы (12) из § 4 для энергии системы зарядов, которая справедлива и тогда, когда наряду с точечными зарядами в систему входят проводники. При этом в слагаемых, соответствующих проводникам, q_i есть полный заряд проводника, а φ_i — его потенциал, создаваемый как другими зарядами, так и его собственным. Докажем это.

Пусть в системе из N зарядов есть один заряженный проводник с зарядом q_n и потенциалом φ_n, а все остальные заряды точечные. Тогда формула для энергии этой системы должна иметь вид

$$W_N = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} q_i \varphi_i + \frac{1}{2} q_n \varphi_n. \tag{10}$$

Чтобы показать справедливость этой формулы, разобьем мысленно заряд проводника q_n на большое число M малых частей так, чтобы каждую часть Δq_k можно было считать точечным зарядом, и представим энергию всей системы как энергию $(N-1)+M$ точечных зарядов. В соответствии с формулой (12) § 4 имеем

$$W_N = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N-1} q_i \varphi_i + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{M} \Delta q_k \varphi_k. \tag{11}$$

Поскольку все точки проводника имеют одинаковый потенциал $\varphi_k = \varphi_n$ $(k = 1, 2, \ldots, M)$, во второй сумме в этой формуле φ_k можно вынести за знак суммы:

$$\frac{1}{2} \sum_{k=1}^{M} \Delta q_k \, \varphi_k = \frac{1}{2} \varphi_n \sum_{k=1}^{M} \Delta q_k = \frac{1}{2} q_n \varphi_n.$$

Сумма всех Δq_k представляет собой полный заряд q_n проводника. Таким образом, формула (10) доказана.

Из приведенного вывода ясно, что потенциал проводника φ_n создается как точечными зарядами q_i, так и зарядом самого проводника q_n. Действительно, в формуле (11) φ_k есть потенциал поля, создаваемого всеми зарядами, кроме Δq_k, т. е. всеми точечными зарядами q_i и зарядом проводника q_n за исключением малой его части Δq_k, которая может быть выбрана сколь угодно малой по сравнению с q_n. Разумеется, формула (10) остается в силе и в том случае, когда в рассматриваемой системе есть только заряженные проводники и нет точечных зарядов.

Применим общую формулу (10) к рассмотренной выше системе, состоящей из точечного заряда q и проводника с бесконечной плоской поверхностью на расстоянии l от заряда q. Потенциал φ_n этого проводника равен нулю, так как проводник простирается до бесконечности, и соответствующее слагаемое в формуле (10) отсутствует. Поэтому энергия рассматриваемой системы равна $(1/2)q\varphi$, где φ — потенциал, создаваемый индуцированными на проводнике зарядами (т. е. зарядом-изображением $-q$) в точке, где находится заряд q: $\varphi = -kq/(2l)$. Итак,

$$W = +\frac{1}{2}q\varphi = -\frac{kq^2}{4l}.$$

Работа A', которую совершают внешние силы при удалении точечного заряда q на бесконечность, равна происходящему при этом изменению энергии системы, т. е. $A' = -W$, что совпадает с (9).

- Докажите, что потенциал всех точек проводника, включая его границу, одинаков независимо от того, заряжен он сам или помещен во внешнее электрическое поле.
- Докажите, что силовые линии электростатического поля вблизи проводника перпендикулярны его поверхности.
- Как связаны между собой поверхностная плотность заряда и напряженность поля вблизи поверхности проводника?
- Объясните, почему диполь втягивается в область, где напряженность электрического поля больше.
- Докажите формулу (7) для поверхностной плотности заряда, индуцируемого точечным зарядом на проводящей плоскости.
- Почему в задаче о заряде вблизи проводящей плоскости формальное применение метода изображений дает правильный результат для действующей силы и вдвое завышенный результат — для работы?
- В чем отличие смысла входящих в формулу (10) величин φ_i в слагаемых, относящихся к точечным зарядам и к проводникам?

△ **Еще о методе изображений.** Мы рассмотрели простейший случай: точечный заряд вблизи бесконечной плоской поверхности проводника, и сумели просто угадать решение — заменили поле индуцированных зарядов полем фиктивного точечного заряда-изображения, расположенного по другую сторону границы проводника. А можно ли применять метод изображений для проводников более сложной формы? Для ответа на этот вопрос рассмотрим разобранный выше пример с несколько иной точки зрения.

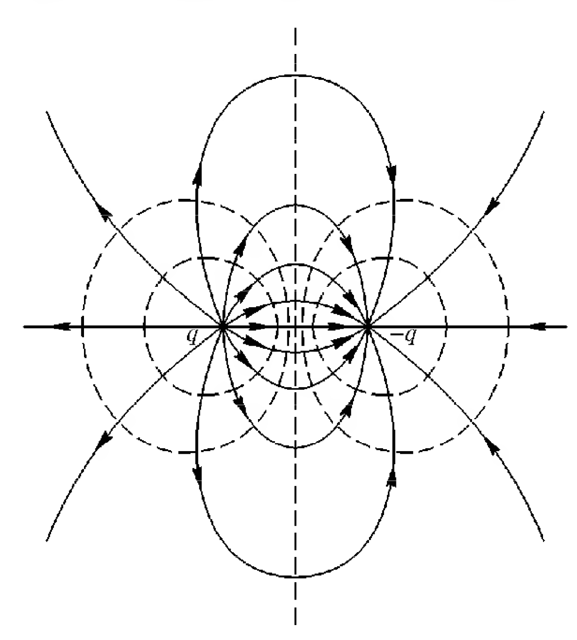


Рис. 33. Линии напряженности и сечения эквипотенциальных поверхностей поля двух разноименных точечных зарядов

Предположим, что имеются два точечных заряда q и $-q$ на расстоянии $2l$ друг от друга. Поле такой системы зарядов хорошо известно. На рис. 33 показаны силовые линии и сечения эквипотенциальных поверхностей. Одна из эквипотенциальных поверхностей — плоскость, перпендикулярная соединяющему заряды отрезку и делящая его пополам. Действительно, потенциал любой точки этой плоскости

$$\varphi = k\left(\frac{q}{r_1} - \frac{q}{r_2}\right) = 0,$$

так как расстояния любой точки этой плоскости от зарядов q и $-q$ одинаковы ($r_1 = r_2$). Совместим с этой плоскостью тонкий проводящий экран. Поскольку все точки проводника, помещенного в электростатическое поле, имеют одинаковый потенциал, картина поля не изменится вне экрана, а внутри него напряженность поля равна нулю. Уберем теперь заряд $-q$. Справа от экрана поля не будет, слева все останется без изменения. Но получившаяся система — как раз то, что нам нужно рассмотреть! Справа от экрана поля нет, слева напряженность в любой точке определяется векторной суммой напряженностей полей, создаваемых зарядами q и $-q$, а потенциал — алгебраической суммой потенциалов этих полей.

Теперь можно сформулировать основную идею метода изображений: нужно подобрать точечные заряды, которые создавали бы такие же поля, как и индуцированные на поверхностях проводников заряды. Положение и величина этих фиктивных зарядов должны выбираться таким образом, чтобы одна из эквипотенциальных поверхностей поля, создаваемого заданными и фиктивными подобранными зарядами, совпадала бы с поверхностью

проводника. Подчеркнем, что с помощью этих зарядов находится поле только вне проводников. Внутри проводников поля нет.

Метод изображений в некоторых случаях позволяет очень просто находить решения весьма сложных на первый взгляд электростатических задач. Для примера рассмотрим поле точечного заряда q, находящегося внутри проводящего прямого двугранного угла

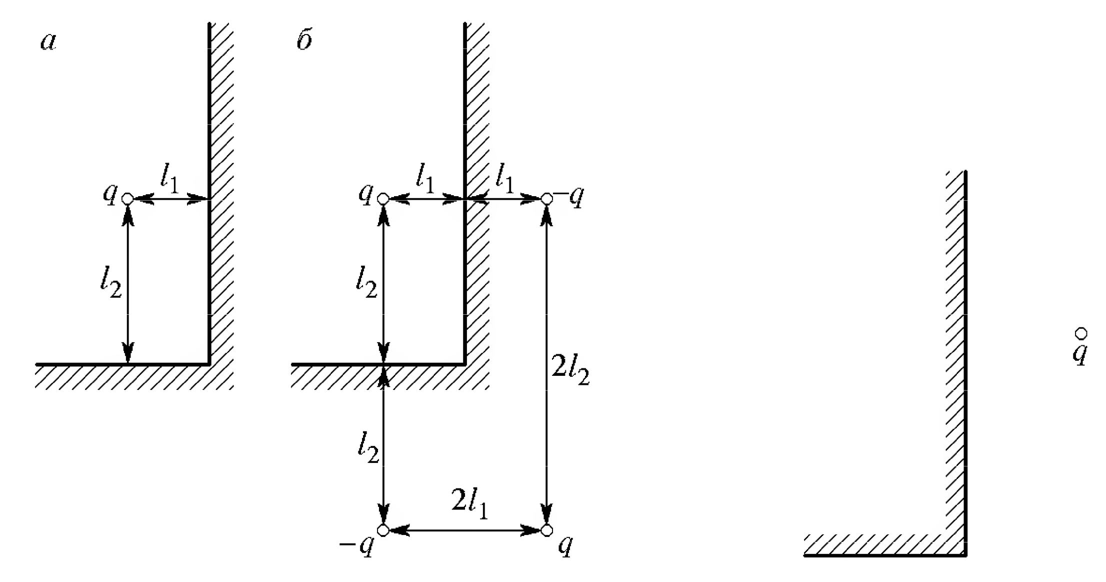


Рис. 34. Электрическое поле внутри двугранного угла (*а*) совпадает с полем четырех зарядов (*б*)

Рис. 35. Такую задачу методом изображений решить нельзя

(рис. 34*а*). Все электрическое поле сосредоточено только внутри угла, где расположен заряд q; по другую сторону проводящей поверхности поля нет. Нетрудно убедиться, что эквипотенциальность поверхности двугранного угла будет обеспечена, если ввести еще три фиктивных точечных заряда. Поэтому поле внутри угла представляет собой суперпозицию полей четырех изображенных на рис. 34*б* зарядов.

Сила, с которой заряд притягивается к проводнику, может быть представлена как векторная сумма сил его взаимодействия с тремя фиктивными зарядами.

Но, несмотря на свою привлекательность, метод изображений далеко не универсален. Достаточно поместить точечный заряд q снаружи проводящего двугранного угла (рис. 35), чтобы задачу уже невозможно было решить таким методом. Хотя система четырех точечных зарядов, изображенная на рис. 34*б*, и в этом случае обеспечивает эквипотенциальность поверхности двугранного угла, она не дает решения задачи. Дело в том, что фиктивные заряды можно помещать только по другую от реального заряда сторону проводящей поверхности. В той точке, где находится точечный заряд, напряженность поля обращается в бесконечность. Поэтому если мы поместим фиктивный точечный заряд по одну сторону с реальным зарядом, то в точке нахождения фиктивного заряда напряженность поля обращается в бесконечность, чего на самом деле нет. ▲

- Сформулируйте основную идею, на которой основан метод электрических изображений.
- Почсму мстод изображсний удастся использовать для нахождсния элсктрического поля вблизи проводников, поверхность которых имеет достаточно простую форму?
- Почему фиктивные заряды в методе изображений нельзя помещать по ту же сторону от проводящих поверхностей, где находятся реальные точечные заряды?

§ 7. Силы в электростатическом поле

Вопрос о силе, действующей на точечный заряд, помещенный в заданное электрическое поле, решается элементарно: эта сила равна произведению заряда на напряженность поля, $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$. Сложнее обстоит дело при нахождении сил, действующих на систему зарядов, например диполь.

Диполь в однородном поле. Если диполь поместить в однородное электрическое поле, то полная действующая на него сила будет равна нулю. Так получается потому, что действующие на входящие в диполь заряды силы равны по модулю и противоположны по направлению. Однако силы приложены в разных точках: это так называемая пара сил. Поэтому в общем случае на диполь действует момент сил, стремящийся ориентировать диполь так, чтобы его дипольный момент p был направлен вдоль вектора напряженности поля $\mathbf{E}$ (рис. 36). Момент пары сил не зависит от выбора точки, относительно которой он рассматривается. Покажем это.

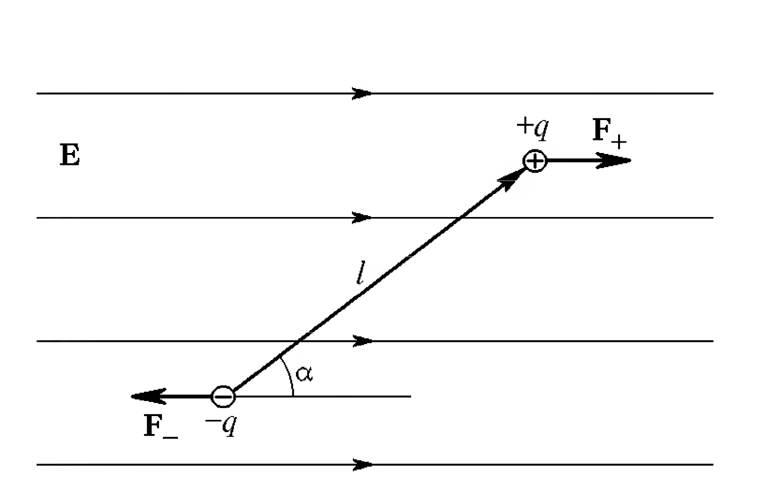


Рис. 36. Силы, действующие на диполь в однородном электрическом поле

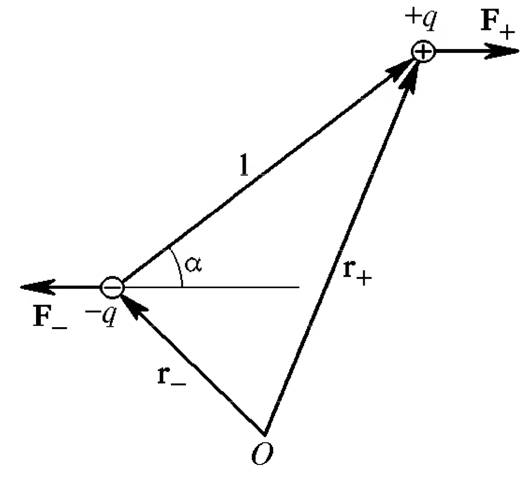


Рис. 37. К расчету момента сил, действующих на диполь

Обозначим через $\mathbf{r}_+$ и $\mathbf{r}_-$ радиусы-векторы входящих в диполь зарядов $+q$ и $-q$ относительно некоторой точки O (рис. 37). Тогда для суммарного момента сил $\mathbf{M}$ можно написать:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_+ + \mathbf{r}_- \times \mathbf{F}_-, \tag{1}$$

где использовано обычное обозначение для векторного произведения. Поскольку $\mathbf{F}_- = -\mathbf{F}_+ = -q\mathbf{E}$, а разность $\mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_-$ представляет собой вектор $\mathbf{l}$, проведенный от отрицательного заряда диполя к положительному (рис. 37), то

$$M = (\mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_-) \times \mathbf{F}_+ = q\mathbf{l} \times \mathbf{E}. \tag{2}$$

Произведение $q\mathbf{l}$ равно дипольному моменту $\mathbf{p}$. Поэтому действующий на диполь момент сил пропорционален дипольному моменту $\mathbf{p}$ и напряженности поля $\mathbf{E}$:

$$\mathbf{M} = \mathbf{p} \times \mathbf{E}. \tag{3}$$

Модуль момента сил M зависит от угла α между направлениями $\mathbf{p}$ и $\mathbf{E}$:

$$M = pE \sin \alpha. \tag{4}$$

При двух ориентациях диполя — по полю ($\alpha = 0$) и против ($\alpha = \pi$) момент сил обращается в нуль. Первая ориентация ($\alpha = 0$) соответствует устойчивому равновесию, вторая ($\alpha = \pi$) — неустойчивому. Характер каждого из этих положений равновесия ясен непосредственно из рис. 36: при малом отклонении ориентации от направления вдоль поля возникает момент сил, стремящийся восстановить эту ориентацию, в то время как при отклонении от противоположной ориентации возникающий момент сил стремится увести из нее диполь еще дальше и «опрокинуть» его.

Энергия диполя во внешнем поле. Характер равновесия диполя в каждом из этих положений можно также установить, рассматривая зависимость потенциальной энергии диполя во внешнем поле от его ориентации. Энергия диполя как совокупности зарядов $+q$ и $-q$ может быть записана в виде

$$W = q_+\varphi_+ + q_-\varphi_- = q(\varphi_+ - \varphi_-), \tag{5}$$

где φ_+ и φ_- — потенциалы тех точек поля, где находятся соответствующие заряды. Разность потенциалов $\varphi_+ - \varphi_-$ между этими точками, в соответствии с формулой (10) § 4, выражается через размер диполя и его ориентацию следующим образом (см. рис. 36):

$$\varphi_+ - \varphi_- = -El \cos \alpha. \tag{6}$$

Поэтому

$$W(\varphi) = -qEl \cos \alpha. \tag{7}$$

Формулу (7) для энергии диполя с моментом $\mathbf{p} = q\mathbf{l}$ во внешнем поле с напряженностью $\mathbf{E}$ можно записать, используя понятие скалярного произведения:

$$W = -(\mathbf{p}\cdot\mathbf{E}). \tag{8}$$

Из формулы (7) видно, что значению $\alpha = 0$ соответствует минимум потенциальной энергии, откуда и следует, что ориентация диполя вдоль вектора $\mathbf{E}$ устойчива. Значению $\alpha = \pi$ соответствует максимум W, поэтому такая ориентация диполя неустойчива.

Диполь в неоднородном поле. В неоднородном внешнем поле на диполь кроме ориентирующего момента сил действует еще и отличная от нуля сила, втягивающая диполь в область с большей напряженностью поля. Эта сила возникает как равнодействующая сил, действующих на входящие в диполь заряды, благодаря тому, что в местах расположения этих зарядов напряженность поля имеет разные значения. Ясно, что эта сила тем больше, чем больше неоднородность поля, т. е. чем больше градиент напряженности.

Попадая в неоднородное электрическое поле, диполь ориентируется в нем должным образом и втягивается в область с большей напряженностью, так как на попадающий туда конец сориентированного диполя действует бóльшая сила, чем на противоположный. Именно таким поведением поляризованных молекул воздуха объясняется возникновение электрического ветра вблизи острия (см. § 5). Такое поведение индуцированных на мелких частицах диполей можно использовать для экспериментальной «визуализации» электростатических полей. Для этого используют ванну с подходящим жидким диэлектриком, к которому подмешен порошок из мелких твердых частичек. Частицы порошка образуют в электрическом поле множество цепочек, простирающихся от одного заряженного электрода до другого, и воспроизводят форму и расположение силовых линий.

На рис. 38 приведена полученная таким способом картина линий напряженности электрического поля двух одинаковых шариков, заряженных разноименно. Картина на рис. 39 дает представ-

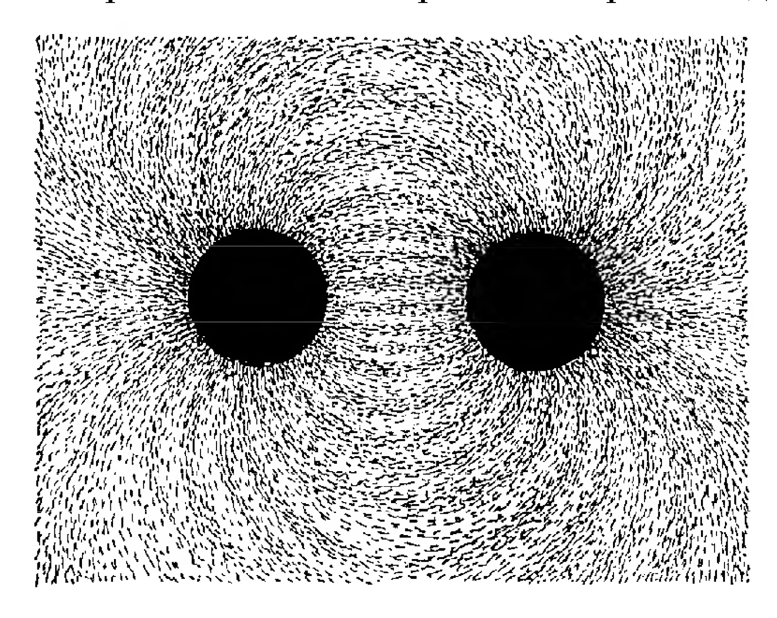


Рис. 38. Линии напряженности электрического поля между двумя разноименно заряженными шариками

ление об электрическом поле двух параллельных пластин с одинаковыми зарядами противоположного знака. Поле между пластинами можно считать однородным в случае, когда расстояние между пластинами мало́ по сравнению с их размерами, так как в средней части линии напряженности имеют вид параллельных прямых,

расположенных с одинаковой густотой. Вблизи краев пластин силовые линии искривляются, т. е. поле становится неоднородным.

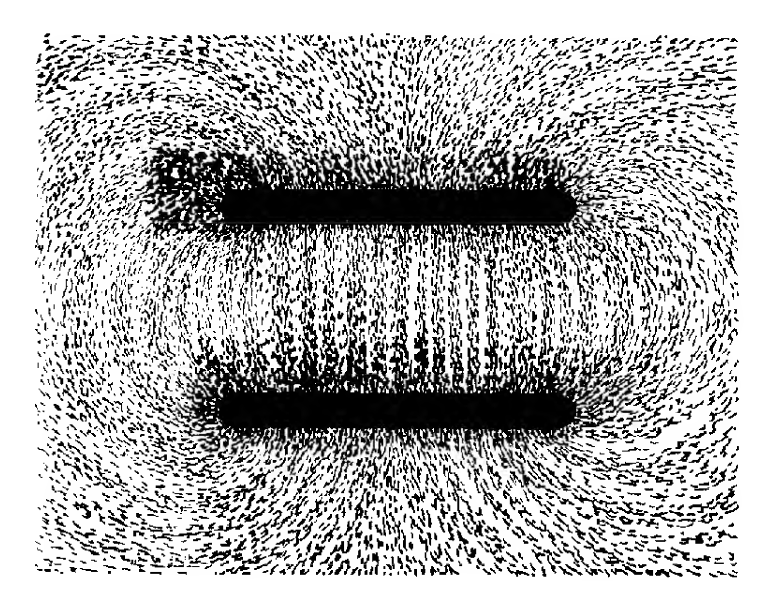


Рис. 39. Картина линий напряженности электрического поля двух разноименно заряженных пластин

И, наконец, именно таким поведением диполей объясняется один из самых известных электростатических опытов — притяжение мелких клочков бумаги наэлектризованной расческой.

Диполь в поле точечного заряда. Количественные закономерности поведения диполя в неоднородном электрическом поле рассмотрим на примере взаимодействия диполя с точечным зарядом. Чтобы не рассматривать силы, действующие на каждый из зарядов диполя, и находить их равнодействующую, найдем силу, действующую на точечный заряд со стороны диполя.

По третьему закону Ньютона она равна по модулю и противоположна по направлению интересующей нас силе, действующей на диполь в неоднородном поле точечного заряда. При этом для напряженности поля диполя мы воспользуемся формулами (15) и (16) § 5.

Приведем результат для двух частных случаев, когда диполь ориентирован вдоль прямой, соединяющей его с точечным зарядом, и перпендикулярно ей. В первом случае угол θ равен нулю. Поэтому отлична от нуля только радиальная составляющая E_r поля диполя и в соответствии с формулой (15) для действующей на точечный заряд Q силы получаем

$$F = QE_r = k\,\frac{2pQ}{r^3}. \tag{9}$$

Направлена эта сила вдоль линии, соединяющей диполь с точечным зарядом. Диполь притягивается к заряду Q, если он ориентирован вдоль создаваемого зарядом Q поля, и отталкивается при противоположной ориентации.

Во втором случае, когда диполь ориентирован поперек, угол $\theta = \pi/2$ и отлична от нуля другая составляющая напряженности, вы-

ражаемая формулой (16) § 5. Для силы, действующей на точечный заряд Q, при этом получаем

$$F = k\,\frac{pQ}{r^3}. \qquad (10)$$

По модулю она вдвое меньше, чем в первом случае, а направлена перпендикулярно прямой, соединяющей диполь с точечным зарядом Q (рис. 40).

В обоих случаях сила взаимодействия точечного заряда и диполя обратно пропорциональна третьей степени расстояния между ними, т. е. убывает с расстоянием быстрее, чем сила взаимодействия точечных зарядов. Можно убедиться, что она пропорциональна градиенту напряженности поля точечного заряда, убывающей как $1/r^2$.

Рис. 40. При таком расположении диполя и точечного заряда силы их взаимодействия $\mathbf{F}_1$ и $\mathbf{F}_2$ не направлены вдоль одной прямой

Силы, действующие на проводник. В тех случаях, когда нас интересует сила, действующая на проводник, помещенный в электрическое поле, приходится учитывать изменение этого поля, связанное с возможным перераспределением зарядов на самом проводнике. Рассмотрим сначала силу, действующую не на весь проводник, а на малый участок его поверхности ΔS. Электрические силы приложены именно к поверхности проводника, так как весь его заряд сосредоточен на поверхности. Распределение этого заряда характеризуется поверхностной плотностью σ, которая связана с напряженностью поля E у поверхности проводника соотношением (1) § 6:

$$E = 4\pi k\sigma. \qquad (11)$$

Однако если умножить заряд $\Delta q = \sigma\Delta S$, сосредоточенный на рассматриваемом участке поверхности ΔS, на напряженность E, даваемую формулой (11), то мы не получим правильного значения силы, действующей на этот участок. Дело в том, что при нахождении силы нужно умножать заряд на напряженность поля, создаваемого всеми остальными зарядами, кроме рассматриваемого, в то время как (11) дает результирующую напряженность электрического поля вблизи данного участка поверхности.

Согласно принципу суперпозиции эту напряженность можно рассматривать как векторную сумму напряженностей полей, создаваемых выделенным элементом поверхности проводника ΔS и всеми остальными зарядами, расположенными как на данном проводнике (за пределами выделенного участка поверхности), так и вне его. Так как нас интересует напряженность поля непосредственно у поверхности проводника, то выделенный элемент ΔS можно считать плоским и при вычислении создаваемого им поля воспользоваться выражением (16) или (17) § 3 для напряженности поля E_1 равномерно заряженной

плоскости:

$$E_1 = 2\pi k\sigma. \qquad (12)$$

Это поле существует по обе стороны от плоскости.

Внутри проводника вплоть до самой его поверхности результирующая напряженность поля равна нулю. Значит, внутри проводника вблизи элемента его поверхности ΔS поле зарядов этого элемента, направленное внутрь проводника, полностью компенсируется полем, создаваемым всеми остальными зарядами. Таким образом, в месте расположения выделенного элемента ΔS все остальные заряды, находящиеся как на проводнике, так и вне его, создают электрическое поле $\mathbf{E}_2$, направленное наружу, причем модуль этой напряженности также определяется выражением (12). Снаружи это поле $\mathbf{E}_2$ имеет одинаковое направление с полем, создаваемым зарядами элемента ΔS, и, складываясь с ним, дает полное поле, напряженность которого вдвое больше и определяется выражением (11).

Сила, действующая на элемент поверхности ΔS, равна произведению заряда этого элемента ΔS на напряженность поля $E_2 = 2\pi k\sigma$:

$$\Delta F = 2\pi k\sigma^2\,\Delta S. \qquad (13)$$

Эта сила направлена наружу по нормали к поверхности проводника независимо от знака заряда этого участка.

Электростатическое давление. Отношение силы (13) к площади поверхности, на которую она действует, представляет собой электростатическое давление p. В соответствии с (13) имеем

$$p = \frac{\Delta F}{\Delta S} = 2\pi k\sigma^2. \qquad (14)$$

Электрические силы как бы «распирают» проводник. Чтобы определить силу, действующую на все заряженное тело, нужно найти распределение заряда σ на его поверхности и просуммировать векторно силы электростатического давления, действующие на отдельные элементы поверхности тела.

- Докажите, что момент любой пары сил, т. е. двух равных по модулю и противоположно направленных сил, не зависит от выбора точки, относительно которой рассматриваются моменты сил.
- Объясните появления знака минус в правой части формулы (6), учитывая, что вектор $\mathbf{E}$ всегда направлен в сторону убывания потенциала.
- Почему при нахождении силы, действующей на диполь во внешнем электрическом поле, приходится учитывать неоднородность этого поля, в то время как при расчете действующего на диполь ориентирующего момента неоднородностью электрического поля можно пренебречь?
- Докажите, что на диполь, который может свободно ориентироваться в электрическом поле, во всех случаях действует именно втягивающая сила.

- Почему электрически нейтральные кусочки бумаги притягиваются наэлектризованной расческой? Проделайте такой опыт и постарайтесь объяснить все, что вам при этом удастся наблюдать.
- Объясните направление сил взаимодействия точечного заряда и диполя, показанных на рис. 40, рассматривая взаимодействие точечного заряда Q с каждым из зарядов, образующих диполь.
- Будет ли действовать сила на незаряженный проводящий шар, помещенный в поле точечного заряда? Если да, то как направлена эта сила?
- Какая сила действует на плоскую поверхность проводника, на расстоянии h от которой находится точечный заряд q? Как она направлена? Зависит ли ее направление от знака заряда q?

§ 8. Конденсаторы. Электроемкость

Рассмотрим два заряженных проводника. Предположим, что все силовые линии, начинающиеся на одном из них, заканчиваются на другом. Для этого, разумеется, они должны иметь равные и противоположные по знаку заряды. Такая система двух проводящих тел называется *конденсатором.*

Примеры конденсаторов. Примерами конденсаторов могут служить две концентрические проводящие сферы (сферический, или шаровой, конденсатор), две параллельные плоские проводящие пластины при условии, что расстояние между ними мало по сравнению с размерами пластин (плоский конденсатор), два коаксиальных проводящих цилиндра при условии, что их длина велика по сравнению с зазором между цилиндрами (цилиндрический конденсатор).

Два проводника, образующие конденсатор, называются его *обкладками.* Во всех таких системах при сообщении обкладкам равных

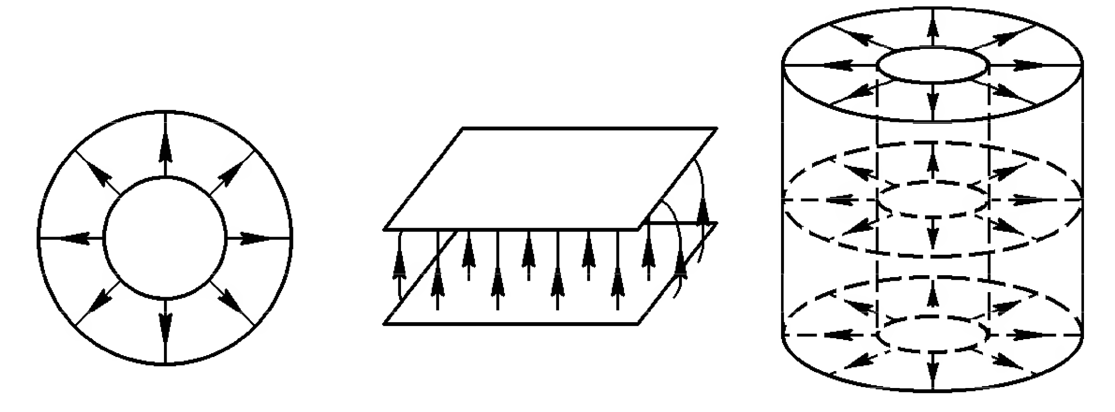


Рис. 41. Электрическое поле в сферическом, плоском и цилиндрическом конденсаторах

по модулю и противоположных по знаку зарядов электрическое поле практически целиком заключено в пространстве между обкладками (рис. 41). Внешний вид некоторых используемых в технике конденсаторов показан на рис. 42.

Основная характеристика конденсатора — *электроемкость* или просто *емкость* C, определяемая как отношение заряда одной из об-

кладок к разности потенциалов т. е. к напряжению, между ними:

$$C = q/U. \tag{1}$$

Распределение зарядов на обкладках будет одинаковым независимо от того, большой или малый заряд им сообщен. Это значит, что напряженность поля, а следовательно, и разность потенциалов между обкладками, пропорциональны сообщенному конденсатору заряду. Поэтому емкость конденсатора не зависит от его заряда. В вакууме емкость определяется исключительно геометрическими ха-

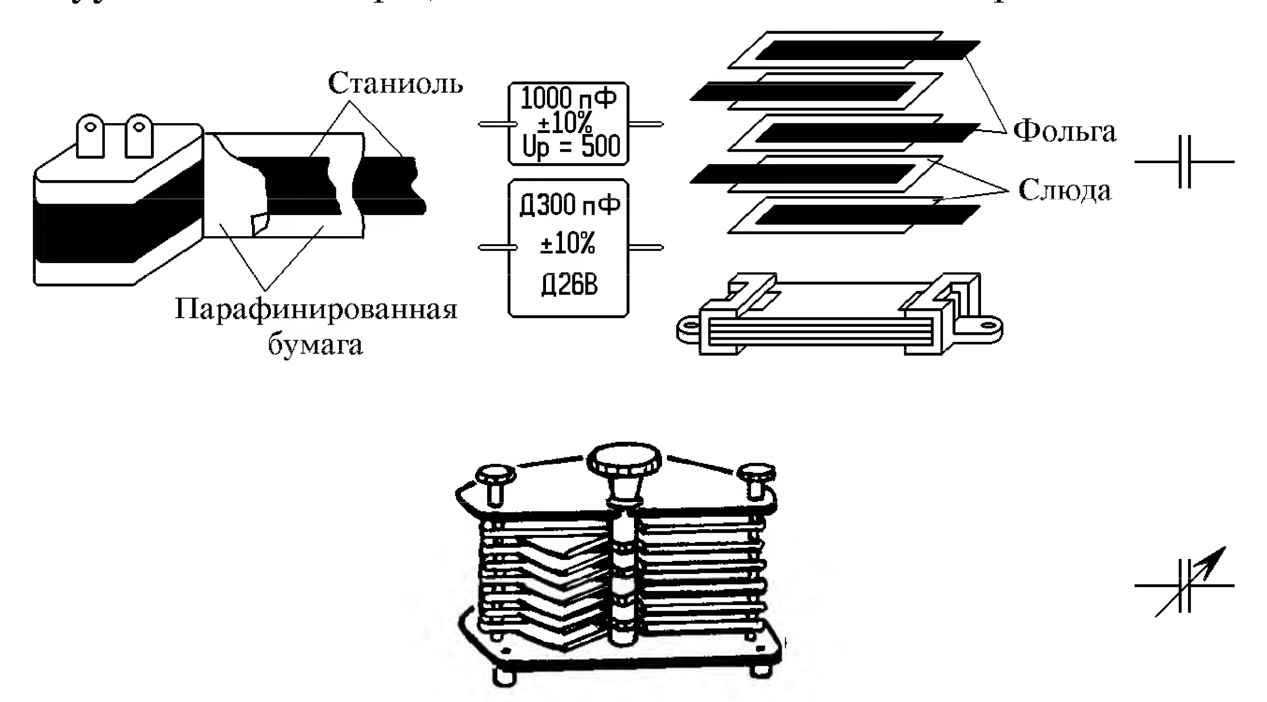


Рис. 42. Устройство, внешний вид и условные обозначения на электрических схемах некоторых конденсаторов

рактеристиками конденсатора, т. е. формой, размерами и взаимным расположением обкладок.

Единицы емкости. В СИ за единицу электроемкости принят фарад (Ф). Емкостью 1 Ф обладает конденсатор, между обкладками которого устанавливается напряжение 1 В при сообщении заряда 1 Кл:

$$1\ \Phi = \frac{1\ \text{Кл}}{1\text{В}}.$$

В абсолютной электростатической системе единиц СГСЭ электроемкость имеет размерность длины и измеряется в сантиметрах:

$$\dim C = \dim \frac{q}{U} = \frac{M^{1/2}L^{3/2}T^{-1}}{M^{1/2}L^{1/2}T^{-1}} = L.$$

На практике обычно приходится иметь дело с конденсаторами, емкость которых значительно меньше 1 Ф. Поэтому используются доли этой единицы — микрофарад (мкФ) и пикофарад (пФ): 1 мкФ $= 10^{-6}$ Ф, 1 пФ $= 10^{-6}$ мкФ $= 10^{-12}$ Ф. Соотношение между фарадом и сантиметром легко установить, учитывая, что 1 Кл =

$= 3 \cdot 10^9$ед. СГСЭ, а 1 В = 1/300 ед. СГСЭ. Поэтому

$$1\ \Phi = \frac{3 \cdot 10^9}{1/300} = 9 \cdot 10^{11}\ \text{см}.$$

Электроемкость и геометрия конденсатора. Зависимость емкости конденсатора от его геометрических характеристик легко проиллюстрировать простыми опытами. Воспользуемся для этого электрометром, подключенным к двум плоским пластинам, расстояние между которыми можно изменять (рис. 43). Чтобы заряды пластин были одинаковы и все поле было сосредоточено только между ними, следует заземлить вторую пластину и корпус электрометра. Отклонение стрелки электрометра пропорционально напряжению между обкладками. Если сдвигать или раздвигать пластины конденсатора, то при неизменном заряде напряжение будет соответственно уменьшаться или увеличиваться: емкость тем больше, чем меньше расстояние между пластинами. Аналогично можно убедиться в том, что емкость конденсатора тем больше, чем больше площадь его пластин. Для этого можно просто сдвигать пластины при неизменном зазоре между ними.

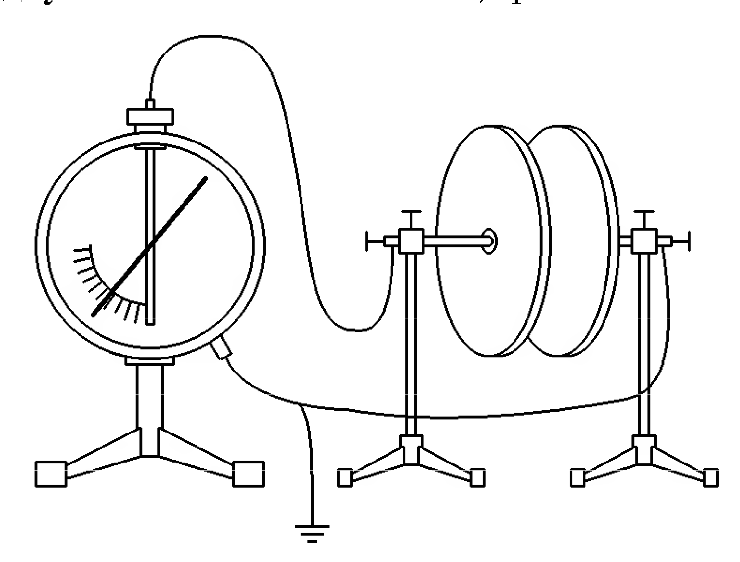


Рис. 43. Емкость конденсатора зависит от расстояния между пластинами

Емкость плоского конденсатора. Получим формулу для емкости плоского конденсатора. Поле между его обкладками однородно за исключением небольшой области вблизи краев пластин. Поэтому напряжение между обкладками равно произведению напряженности поля E на расстоянии d между ними: $U = Ed$. Для нахождения напряженности поля E можно воспользоваться формулой (1) § 6, которая связывает E вблизи поверхности проводника с поверхностной плотностью зарядов σ: $E = 4\pi k\sigma$. Выразим σ через заряд конденсатора q и площадь S пластины, считая распределение заряда равномерным, что согласуется с используемым предположением об однородности поля: $\sigma = q/S$. Подставляя приведенные соотношения в общее определение емкости (1), находим

$$C = \frac{S}{4\pi k d}. \tag{2}$$

В СИ, где $k = 1/(4\pi\varepsilon_0)$, емкость плоского конденсатора имеет вид

$$C = \frac{\varepsilon_0 S}{d}. \tag{3}$$

В системе единиц СГСЭ $k = 1$ и

$$C = \frac{S}{4\pi d}. \qquad (4)$$

Емкость сферического конденсатора. Совершенно аналогично можно вывести формулу для емкости сферического конденсатора, рассматривая электрическое поле в промежутке между двумя заряженными концентрическими сферами радиусов R_1 и R_2. Напряженность поля там такая же, как в случае уединенного заряженного шара радиуса R_1. Поэтому для напряжения между обкладками радиусов R_1 и R_2 справедливо

$$U = kq\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right).$$

Выражение для емкости получаем, подставляя U в формулу (1):

$$C = \frac{1}{k}\,\frac{R_1R_2}{R_2 - R_1}. \qquad (5)$$

Емкость уединенного проводника. Иногда вводят понятие емкости уединенного проводника, рассматривая предельный случай конденсатора, одна из обкладок которого удалена на бесконечность. В частности, емкость уединенного проводящего шара получается из (5) в результате предельного перехода $R_2 \to \infty$, что соответствует неограниченному увеличению радиуса внешней обкладки при неизменном радиусе внутренней $R_1 = R$:

$$C = \frac{1}{k}\,R. \qquad (6)$$

В системе единиц СГСЭ, где $k = 1$, емкость уединенного шара равна его радиусу. Если проводник имеет несферическую форму, его емкость по порядку величины равна характерному линейному размеру, хотя, конечно же, зависит и от его формы. В отличие от уединенного проводника, емкость конденсатора гораздо больше его линейных размеров. Например, у плоского конденсатора характерный линейный размер равен $\sqrt{S}$, причем $\sqrt{S} \gg d$. Как видно из формулы (4), при этом $C \gg \sqrt{S}$.

Конденсатор с диэлектриком. В рассмотренных выше примерах конденсаторов пространство между обкладками считалось пустым. Тем не менее полученные выражения для емкости справедливы и тогда, когда это пространство заполнено воздухом, как это было в описанных простых опытах. Если пространство между обкладками заполнить каким-либо диэлектриком, емкость конденсатора увеличивается. В этом легко убедиться на опыте, вдвигая диэлектрическую пластину в промежуток между обкладками заряженного конденсатора, подключенного к электрометру (рис. 43). При неизменном заряде конденсатора напряжение между обкладками уменьшается, что свидетельствует о возрастании емкости.

Уменьшение разности потенциалов между обкладками при внесении туда диэлектрической пластины свидетельствует о том, что напряженность электрического поля в зазоре становится меньше. Это уменьшение зависит от того, какой именно диэлектрик используется в опыте.

Диэлектрическая проницаемость. Для характеристики электрических свойств диэлектрика вводят физическую величину, называемую *диэлектрической проницаемостью*. Диэлектрическая проницаемость ε — это безразмерная величина, показывающая, во сколько раз напряженность электрического поля в заполненном диэлектриком конденсаторе (или напряжение между его обкладками) меньше, чем в отсутствие диэлектрика при том же заряде конденсатора. Другими словами, диэлектрическая проницаемость показывает, во сколько раз увеличивается емкость конденсатора при заполнении его диэлектриком. Например, емкость плоского конденсатора, заполненного диэлектриком с проницаемостью ε, равна

$$C = \frac{\varepsilon S}{4\pi d} \text{ (СГСЭ)}, \quad C = \frac{\varepsilon_0 \varepsilon S}{d} \text{ (СИ)}. \tag{7}$$

Приведенное здесь определение диэлектрической проницаемости соответствует феноменологическому подходу, при котором рассматриваются только макроскопические свойства вещества в электрическом поле. Микроскопический подход, основанный на рассмотрении поляризации атомов или молекул, из которых состоит вещество, предполагает исследование какой-либо конкретной модели и позволяет не только подробно описывать электрические и магнитные поля внутри вещества, но и понять, как протекают макроскопические электрические и магнитные явления в веществе. На этом этапе мы ограничиваемся только феноменологическим подходом.

У твердых диэлектриков значение ε лежит в пределах от 4 до 7, а у жидких — от 2 до 81. Такой аномально большой диэлектрической проницаемостью обладает обыкновенная чистая вода. Кроме воздушного конденсатора переменной емкости (см. рис. 42), используемого для настройки радиоприемников, все другие применяемые в технике конденсаторы заполнены диэлектриком.

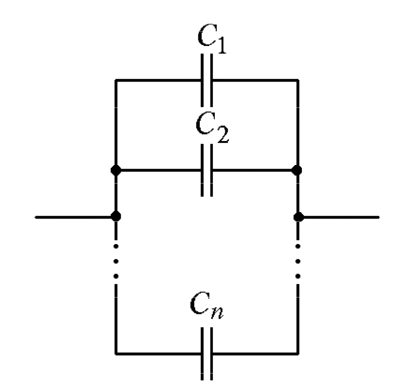


Рис. 44. Параллельное соединение конденсаторов

Батареи конденсаторов. При использовании конденсаторов их иногда соединяют в батареи. При параллельном соединении (рис. 44) напряжения U на конденсаторах одинаковы, а полный заряд батареи q равен сумме зарядов конденсаторов q_i, для каждого из которых, очевидно, справедливо $q_i = C_i U$. Рассматривая батарею как один конденса-

тор, имеем

$$q = CU. \tag{8}$$

С другой стороны,

$$q = \sum_i q_i = U \sum_i C_i. \tag{9}$$

Сравнивая (8) и (9), получаем, что емкость батареи параллельно соединенных конденсаторов равна сумме их емкостей:

$$C = C_1 + C_2 + \ldots + C_n. \tag{10}$$

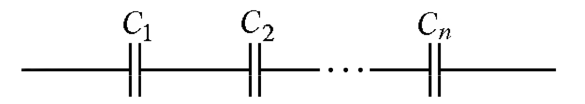


Рис. 45. Последовательное соединение конденсаторов

При последовательном соединении предварительно незаряженных конденсаторов (рис. 45) заряды q на всех конденсаторах одинаковы, а полное напряжение U равно сумме напряжений U_i на отдельных конденсаторах:

$$U = \sum_i U_i = q \sum_i \frac{1}{C_i}. \tag{11}$$

С другой стороны, рассматривая батарею как один конденсатор, имеем

$$U = \frac{q}{C}. \tag{12}$$

Сравнивая (11) и (12), видим, что при последовательном соединении конденсаторов складываются обратные емкостям величины:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \ldots + \frac{1}{C_n}. \tag{13}$$

При последовательном соединении емкость батареи меньше самой малой из емкостей соединенных конденсаторов.

- В каком случае два проводящих тела образуют конденсатор?
- Что называется зарядом конденсатора?
- Как установить связь между единицами емкости СИ и СГСЭ?
- Объясните качественно, почему емкость конденсатора увеличивается при уменьшении зазора между обкладками.
- Получите формулу для емкости плоского конденсатора, рассматривая электрическое поле в нем как суперпозицию полей, создаваемых двумя плоскостями, заряженными разноименно.
- Получите формулу для емкости плоского конденсатора, рассматривая его как предельный случай сферического конденсатора, у которого R_1 и R_2 стремятся к бесконечности так, что разность $R_1 - R_2 = d$ остается постоянной.
- Почему нельзя говорить о емкости уединенной бесконечной плоской пластины или отдельного бесконечно длинного цилиндра?

- Охарактеризуйте кратко различие между феноменологическим и микроскопическим подходами при исследовании свойств вещества в электрическом поле.
- Каков смысл диэлектрической проницаемости вещества?
- Почему при расчете емкости батареи последовательно соединенных конденсаторов оговаривалось условие, чтобы они предварительно не были заряжены?
- В чем смысл последовательного соединения конденсаторов, если оно приводит лишь к уменьшению емкости?

△ **Поле внутри и вне конденсатора.** Чтобы подчеркнуть различие между тем, что называют зарядом конденсатора, и полным зарядом обкладок, рассмотрим следующий пример. Пусть наружная обкладка сферического конденсатора заземлена, а внутренней сообщен заряд q. Весь этот заряд равномерно распределится по внешней поверхности внутренней обкладки. Тогда на внутренней поверхности наружной сферы индуцируется заряд $-q$, и, следовательно, заряд конденсатора равен q. А что будет на внешней поверхности наружной сферы? Это зависит от того, что окружает конденсатор. Пусть, например, на расстоянии l от поверхности внешней сферы находится точечный заряд Q (рис. 46). Этот заряд никак не повлияет на электрическое состояние внутреннего пространства конденсатора, т. е. на поле между его обкладками. В самом деле, внутреннее и внешнее пространства разделены толщей металла наружной обкладки, в которой электрическое поле равно нулю.

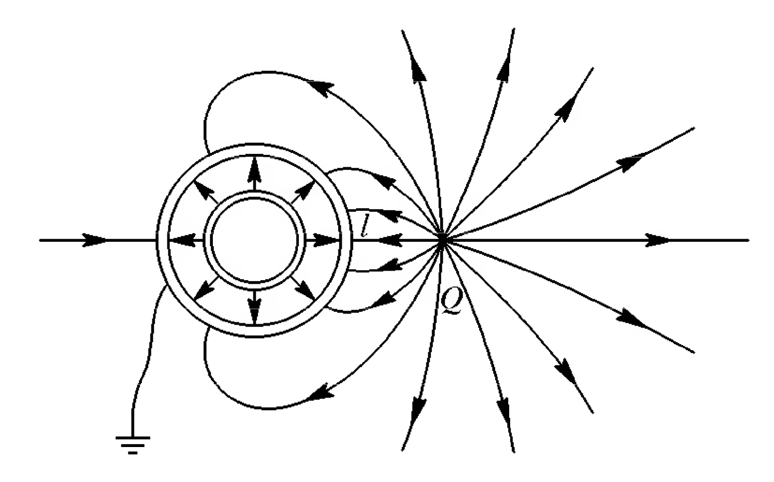


Рис. 46. Сферический конденсатор во внешнем электрическом поле

Заряд на внешней поверхности обкладки. Но характер поля во внешнем пространстве и заряд, индуцированный на наружной поверхности внешней сферы, зависят от величины и положения заряда Q. Это поле будет точно таким же, как и в случае, когда заряд Q находится на расстоянии l от поверхности сплошного заземленного металлического шара, радиус которого равен радиусу внешней сферы конденсатора (рис. 47). Таким же будет и индуцированный заряд.

Для нахождения величины индуцированного заряда будем рассуждать следующим образом. Электрическое поле в любой точке пространства создается зарядом Q и зарядом, индуциро-

ванным на поверхности шара, который распределен там, разумеется, неравномерно — как раз так, чтобы обратилась в нуль результирующая напряженность поля внутри шара. Согласно принципу суперпозиции потенциал в любой точке можно искать в виде суммы потенциалов полей, создаваемых точечным зарядом q и точечными зарядами, на которые можно разбить распределенный по поверхности шара индуцированный заряд. Поскольку все элементарные заряды Δq_i, на которые разбит индуцированный на поверхности шара заряд Q', находятся на одинаковом расстоянии R от центра шара, то потенциал создаваемого им поля в центре шара будет равен

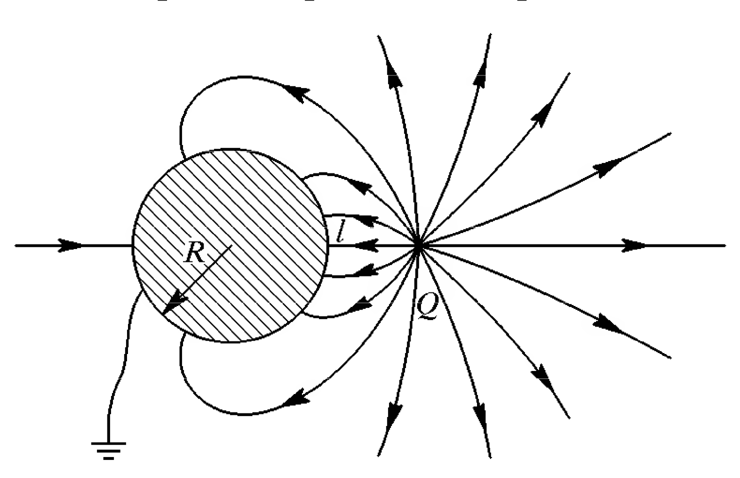


Рис. 47. Поле точечного заряда вблизи заземленного проводящего шара

$$k \sum_i \frac{\Delta q_i}{R} = k \frac{1}{R} \sum_i \Delta q_i = k \frac{Q'}{R}.$$

Тогда полный потенциал в центре заземленного шара равен

$$\varphi_0 = k\left(\frac{Q'}{R} + \frac{Q}{R+l}\right) = 0,$$

откуда

$$Q' = -Q\frac{R}{R+l}.$$

Знак минус отражает тот факт, что индуцированный заряд всегда противоположного знака.

Итак, мы видим, что заряд на наружной поверхности внешней сферы конденсатора определяется тем окружением, в котором находится конденсатор, и не имеет никакого отношения к заряду конденсатора q. Полный заряд внешней обкладки конденсатора, разумеется, равен сумме зарядов ее внешней и внутренней поверхностей, однако заряд конденсатора определяется только зарядом внутренней поверхности этой обкладки, который связан силовыми линиями поля с зарядом внутренней обкладки.

В разобранном примере независимость электрического поля в пространстве между обкладками конденсатора и, следовательно, его емкости от внешних тел (как заряженных, так и незаряженных) обусловлена *электростатической защитой*, т. е. толщей металла внешней обкладки. К чему может привести отсутствие такой защиты, можно увидеть на следующем примере.

Плоский конденсатор с экраном. Рассмотрим плоский конденсатор в виде двух параллельных металлических пластин, электрическое поле которого практически целиком сосредоточено в пространстве между пластинами. Заключим конденсатор в незаряженную плоскую металлическую коробку, как показано на рис. 48. На первый взгляд может показаться, что картина поля между обкладками конденсатора не изменится, так как все поле сосредоточено между пластинами, а краевым эффектом мы пренебрегаем. Однако легко видеть, что это не так. Снаружи конденсатора напряженность поля равна нулю, поэтому во всех точках слева от конденсатора потенциал одинаков и совпадает с потенциалом левой пластины. Точно так же потенциал любой точки справа от конденсатора совпадает с потенциалом правой пластины (рис. 49). Поэтому, заключая конденсатор в металлическую коробку, мы соединяем проводником точки, имеющие разный потенциал.

В результате в металлической коробке будет происходить перераспределение зарядов до тех пор, пока не выравняются потенциалы всех ее точек. На внутренней поверхности коробки индуцируются заряды, и появится электрическое поле внутри коробки, т. е. снаружи конденсатора (рис. 50). Но это означает, что на внешних

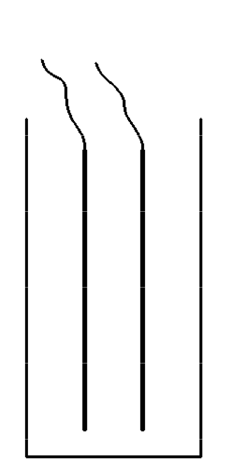


Рис. 48. Конденсатор в металлической коробке

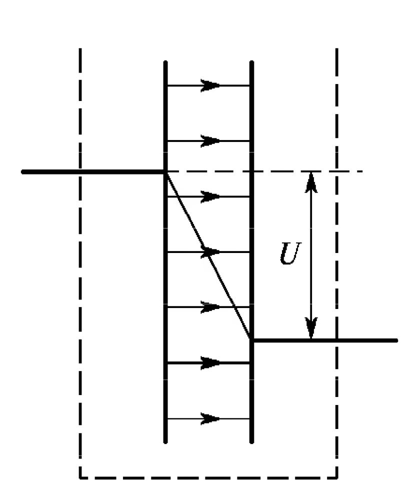


Рис. 49. Электрическое поле заряженного плоского конденсатора

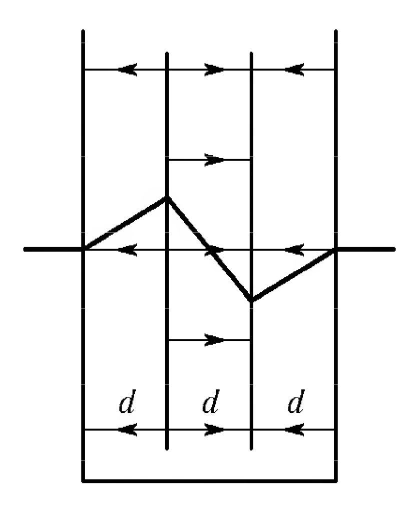


Рис. 50. Электрическое поле заряженного конденсатора, помещенного в металлическую коробку

поверхностях пластин конденсатора тоже появятся заряды. Так как при этом полный заряд изолированной пластины не меняется, то заряд на ее внешней поверхности может возникнуть только за счет перетекания заряда с внутренней поверхности. Но при изменении заряда на внутренних поверхностях обкладок изменится напряженность поля между пластинами конденсатора.

Таким образом, заключение рассмотренного конденсатора в металлическую коробку приводит к изменению электрического состояния внутреннего пространства.

Изменение зарядов пластин и электрического поля в этом примере может быть легко рассчитано. Обозначим заряд изолированного конденсатора через q. Заряд, перетекающий на наружные поверхности пластин при надевании коробки, обозначим через q'. Такой же заряд противоположного знака будет индуцирован на внутренних поверхностях коробки. На внутренних поверхностях пластин конденсатора останется заряд $q - q'$. Тогда в пространстве между пластинами напряженность однородного поля будет равна $(q - q')/(S\varepsilon_0)$ в единицах СИ, а вне конденсатора поле направлено в противоположную сторону и его напряженность равна $q'/(S\varepsilon_0)$, где S — площадь пластины. Требуя, чтобы разность потенциалов между противоположными стенками металлической коробки была равна нулю, и считая для простоты расстояния между всеми пластинами одинаковыми и равными d (рис. 50), получаем

$$-\frac{q'}{S\varepsilon_0}d + \frac{q - q'}{S\varepsilon_0}d - \frac{q'}{S\varepsilon_0}d = 0,$$

откуда $q' = q/3$. Это значит, что напряженность поля в конденсаторе составляет теперь 2/3 первоначального значения, а вне

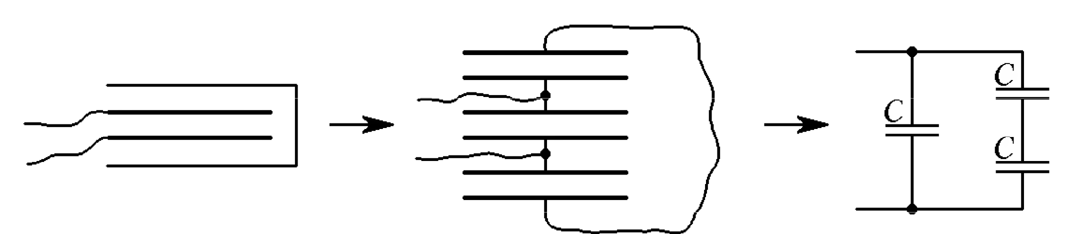


Рис. 51. Переход к эквивалентной схеме для конденсатора в металлической коробке

конденсатора поле в три раза слабее, чем было в конденсаторе до надевания коробки. Разность потенциалов между обкладками конденсатора U_1 составляет 2/3 первоначального напряжения на конденсаторе U.

Емкость изолированного конденсатора есть $C = q/U$. Если под емкостью системы, получившейся при надевании на конденсатор металлической коробки, понимать отношение полного заряда q, сообщенного пластине, к разности потенциалов между пластинами U_1, то

$$C_1 = \frac{q}{U_1} = \frac{3}{2}C.$$

Этот результат легко понять, если учесть, что после надевания коробки поле существует во всех трех промежутках между пластинами, т. е. фактически имеются три одинаковых конденсатора, эквивалентная схема включения которых показана на рис. 51. Вычисляя емкость получившейся системы конденсаторов, получаем $C_1 = (3/2)C$.

Надетая на конденсатор металлическая коробка осуществляет *электростатическую защиту* системы. Теперь мы можем подносить снаружи к коробке любые заряженные или незаряженные тела и при этом электрическое поле внутри коробки не изменится. Значит, не изменится и емкость системы.

Обратим внимание на то, что в разобранном примере, выяснив все, что нас интересовало, мы тем не менее обошли стороной вопрос о том, какие же силы осуществили перераспределение зарядов. Какое электрическое поле вызвало движение электронов в материале проводящей коробки?

Очевидно, что это может быть только то неоднородное поле, которое выходит за пределы конденсатора вблизи краев пластины (см. рис. 39). Хотя напряженность этого поля мала и не принимается во внимание при расчете изменения емкости, именно она определяет суть рассматриваемого явления — перемещает заряды и этим вызывает изменение напряженности электрического поля внутри коробки. ▲

- Почему под зарядом конденсатора следует понимать не полный заряд обкладки, а только ту его часть, что находится на ее внутренней стороне, обращенной к другой обкладке?
- В чем проявляется роль краевых эффектов при рассмотрении электростатических явлений в конденсаторе?
- Как изменится емкость батареи конденсаторов, если замкнуть между собой обкладки одного из них?

§ 9. Энергия электрического поля

Заряженный конденсатор обладает энергией. Проще всего выражение для этой энергии получить, рассматривая плоский конденсатор.

Энергия плоского конденсатора. Предположим, что пластины конденсатора, несущие равные и противоположные по знаку заряды, сначала расположены на расстоянии d. Затем одной из пластин мысленно дадим возможность перемещаться в направлении к другой пластине вплоть до полного их совмещения, когда заряды пластин компенсируются и конденсатор фактически исчезнет. При этом исчезает и энергия конденсатора, поэтому работа действующей на пластину электрической силы, совершаемая при ее перемещении, как раз и равна первоначальному запасу энергии конденсатора. Подсчитаем эту работу.

Сила, действующая на пластину, равна произведению ее заряда q на напряженность однородного электрического поля, создаваемого другой пластиной. Эта напряженность, как мы видели в § 7, равна половине полной напряженности E электрического поля внутри конденсатора, создаваемой зарядами обеих пластин. Поэтому искомая работа $A = qE/(2d) = qU/2$, где $U = Ed$ — напряжение между

пластинами. Таким образом, выражение для энергии конденсатора через его заряд q и напряжение U имеет вид

$$W = \frac{qU}{2}. \tag{1}$$

Поскольку заряд конденсатора q и напряжение U связаны соотношением $q = CU$, то формулу (1) можно переписать в эквивалентной форме так, чтобы энергия выражалась либо только через заряд q, либо только через напряжение U:

$$W = \frac{qU}{2} = \frac{CU^2}{2} = \frac{q^2}{2C}. \tag{2}$$

Энергия конденсатора. Эта формула справедлива для конденсатора любой формы. В этом можно убедиться, рассматривая работу, которую необходимо совершить для того, чтобы зарядить конденсатор, перенося заряд маленькими порциями с одной обкладки на другую. При вычислении этой работы следует учесть, что первая порция заряда Δq переносится через нулевую разность потенциалов, последняя — через полную разность потенциалов U, а в каждый момент разность потенциалов пропорциональна уже перенесенному заряду.

Формулы (1) или (2) для энергии заряженного конденсатора можно, разумеется, получить как частный случай общей формулы (12) § 4, справедливой для энергии системы любых заряженных тел:

$$W = \frac{1}{2}\,(q_1\varphi_1 + q_2\varphi_2) = \frac{1}{2}\,q(\varphi_1 - \varphi_2) = \frac{1}{2}\,qU. \tag{3}$$

Энергию заряженного конденсатора можно трактовать не только как потенциальную энергию взаимодействия зарядов, но и как энергию создаваемого этими зарядами электрического поля, заключенного в пространстве между обкладками конденсатора. Обратимся опять для простоты к плоскому конденсатору, где электрическое поле однородно. Подставляя $U = Ed$ и $U = Ed$ и $C = S/(4\pi kd)$ в выражение для энергии $W = CU^2/2$, получаем

$$W = \frac{1}{8\pi k}\,E^2V, \tag{4}$$

где $V = Sd$ — объем между обкладками конденсатора, заполненный электрическим полем.

Плотность энергии электрического поля. Энергия заряженного конденсатора оказывается пропорциональной занимаемому электрическим полем объему. Очевидно, что множитель, стоящий перед V в формуле (4), имеет смысл энергии, заключенной в единичном объеме, т. е. объемной плотности w энергии электрического поля:

$$w = \frac{E^2}{8\pi k}. \tag{5}$$

В СИ эта формула имеет вид

$$w = \frac{\varepsilon_0 E^2}{2}. \tag{6}$$

В системе единиц СГСЭ

$$w = \frac{E^2}{8\pi}. \tag{7}$$

Выражения (5)—(7) для объемной плотности энергии справедливы при любой конфигурации электрического поля.

Энергия заряженного шара. Рассмотрим, например, энергию уединенного шара радиуса R, по поверхности которого равномерно распределен заряд q. Такую систему можно рассматривать как предельный случай сферического конденсатора, радиус внешней обкладки которого стремится к бесконечности, а емкость принимает значение, равное радиусу шара R (в системе единиц СГСЭ). Применяя для энергии формулу $W = q^2/(2C)$, получаем

$$W = \frac{q^2}{2R}. \tag{8}$$

Если рассматривать эту энергию как энергию поля, создаваемого шаром, то можно считать, что вся она локализована в окружающем шар пространстве, а не внутри его, так как там напряженность поля E равна нулю. Наибольшее значение объемная плотность имеет вблизи поверхности шара и очень быстро убывает при удалении от нее — как $1/r^4$.

Собственная энергия точечного заряда. Таким образом, электростатическую энергию можно рассматривать либо как энергию взаимодействия зарядов, либо как энергию создаваемого этими зарядами поля.

Однако, рассматривая энергию двух разноименных точечных зарядов, мы приходим к противоречию. Согласно формуле (12) § 4 эта энергия отрицательна: $kq_1q_2/r_{12} < 0$, а если ее рассматривать как энергию поля этих зарядов, то энергия получается положительной, так как плотность энергии поля, пропорциональная E^2, нигде не принимает отрицательных значений. В чем же здесь дело? Объясняется это тем, что в формуле (12) для энергии точечных зарядов учитывается лишь их взаимодействие, но не учитывается взаимодействие отдельных элементов каждого такого заряда между собой. Действительно, если мы имеем дело лишь с одним-единственным точечным зарядом q, то энергия, вычисляемая по формуле (12), равна нулю, в то время как энергия электрического поля этого заряда имеет положительное (бесконечное для истинно точечного заряда) значение, равное так называемой собственной энергии заряда q.

Чтобы убедиться в этом, обратимся к формуле (8) для энергии заряженного шара. Если устремить в ней R к нулю, то мы и придем к точечному заряду. С уменьшением R плотность энергии растет настолько быстро, что, как видно из (8), полная энергия поля оказывается бесконечно большой. В классической электродинамике собственная энергия точечного заряда бесконечна.

Собственная энергия произвольного заряда может рассматриваться как энергия взаимодействия его частей. Эта энергия зависит, конечно, от размеров и формы заряда. Часть ее освободилась бы при «взрыве» и разлете «осколков» заряда под действием кулоновских сил отталкивания, превратившись в кинетическую энергию «осколков», другая ее часть осталась бы в форме собственной энергии этих «осколков».

Рассмотрим теперь полную, т. е. собственную и взаимную, энергию двух зарядов q_1 и q_2. Пусть каждый из этих зарядов в отдельности создает соответственно поле $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$, так что результирующее поле $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$. Объемная плотность энергии поля распадается на три слагаемых в соответствии с выражением

$$E^2 = (\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2)^2 = E_1^2 + E_2^2 + 2(\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2). \tag{9}$$

Первые два слагаемых в правой части соответствуют объемной плотности собственных энергий зарядов q_1 и q_2, а третье слагаемое соответствует энергии взаимодействия зарядов друг с другом. Именно эта часть полной энергии системы и дается формулой (12) § 4. Из очевидного неравенства $(\mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2)^2 \geqslant 0$ следует, что $E_1^2 + E_2^2 \geqslant 2(\mathbf{E}_1\mathbf{E}_2)$. Таким образом, положительная собственная энергия зарядов всегда больше или в крайнем случае равна их взаимной энергии. Насмотря на то, что взаимная энергия может принимать как положительные, так и отрицательные значения, полная энергия, пропорциональная E^2, всегда положительна.

При всех возможных перемещениях зарядов, не изменяющих их формы и размеров, собственная энергия зарядов остается постоянной. Поэтому при таких перемещениях изменение полной энергии системы зарядов равно изменению их взаимной энергии. Так как во всех физических явлениях существенно именно изменение энергии системы, то постоянная часть — собственная энергия зарядов — может быть отброшена. В этом смысле и следует понимать утверждение об эквивалентности энергии взаимодействия зарядов и энергии создаваемого ими поля. Итак, мы можем сопоставлять системе зарядов либо полную энергию — энергию поля, либо энергию взаимодействия и будем получать при этом, вообще говоря, разные значения. Но, рассматривая переход системы из одного состояния в другое, мы для изменения энергии всегда получим одну и ту же величину.

Обратим внимание, что при использовании формулы (12) § 4 для системы точечных зарядов и проводников мы получаем, как видно

из самого вывода формулы, собственную энергию проводников и взаимную потенциальную энергию всех входящих в систему зарядов, т. е. полную энергию поля за вычетом неизменной собственной энергии точечных зарядов.

Собственная энергия проводника. Собственная энергия проводников, в отличие от собственной энергии точечных зарядов, не является постоянной. Она может измениться при изменении конфигурации системы вследствие перемещения зарядов в проводниках. Поэтому эта энергия не может быть отброшена при вычислении изменения энергии системы.

В том случае, когда система состоит только из проводников, а точечных зарядов нет, формула (12) § 4 дает полную энергию системы, т. е. сумму собственных энергий всех проводников и энергии их взаимодействия. Мы получаем одно и то же значение независимо от того, рассматриваем ли энергию поля или энергию системы зарядов. Примером такой системы является конденсатор, где, как мы видели, оба подхода дают одинаковый результат $W = qU/2$.

Очевидно, что при наличии точечных зарядов и проводников не имеет смысла рассматривать по отдельности собственную энергию проводников и взаимную потенциальную энергию всех зарядов, так как работа внешних сил определяет изменение суммы этих энергий. Исключить из рассмотрения можно только неизменную собственную энергию точечных зарядов.

Энергетические превращения в конденсаторах. Для анализа энергетических превращений, которые могут происходить в электрическом поле, рассмотрим плоский конденсатор с воздушным зазором, подсоединенный к источнику с постоянным напряжением U_0. Будем раздвигать пластины конденсатора от расстояния d_1 до расстояния d_2 в двух случаях: предварительно отсоединив конденсатор от источника питания и не отсоединяя конденсатор от источника.

В первом случае заряд на обкладках конденсатора все время остается неизменным: $q = CU = \text{const}$, хотя емкость C и напряжение U изменяются при движении пластин. Зная напряжение на конденсаторе в начальный момент, находим величину этого заряда (в единицах СИ):

$$q = C_1 U_0 = \frac{\varepsilon_0 S}{d_1} U_0. \tag{10}$$

Так как разноименно заряженные пластины конденсатора притягиваются, для их раздвижения необходимо совершить положительную механическую работу. Если при раздвижении расстояние между пластинами все время остается много меньше их линейных размеров, то сила притяжения пластин не зависит от расстояния между ними.

Для равномерного перемещения пластины внешняя сила должна уравновесить силу притяжения, и поэтому совершаемая при перемещении пластины на расстояние $d_2 - d_1$ механическая работа равна

$$A = F(d_2 - d_1) = \frac{qE}{2}(d_2 - d_1), \tag{11}$$

так как $F = qE/2$, где $E = U_0/d_1$ — неизменная напряженность поля, создаваемого зарядами обеих обкладок. Подставляя в (11) заряд из (10) и $E = U_0/d_1$, находим

$$A = \frac{\varepsilon_0 S U_0^2}{2d_1^2}(d_2 - d_1). \tag{12}$$

Второй случай отличается от рассмотренного тем, что при движении пластин остается неизменным не заряд конденсатора, а напряжение на нем: $U = U_0$. Поскольку расстояние между обкладками увеличивается, то напряженность поля убывает, а следовательно, убывает и заряд на пластинах. Поэтому сила притяжения пластин не остается постоянной, как в первом случае, а убывает, причем, как нетрудно убедиться, обратно пропорционально квадрату расстояния. Вычислить работу этой переменной силы можно с помощью закона сохранения и превращения энергии.

Применим его сначала к более простому первому случаю. Изменение энергии W конденсатора происходит только за счет механической работы, совершаемой внешними силами: $W_2 - W_1 = A$. Поскольку заряд конденсатора остается неизменным, для энергии конденсатора удобно воспользоваться формулой $W = q^2/(2C)$. Таким образом,

$$A = \frac{q^2}{2}\left(\frac{1}{C_2} - \frac{1}{C_1}\right),$$

что при подстановке выражения для емкости и для заряда (10) приводит к окончательной формуле (12). Обратим внимание, что этот результат можно получить и рассматривая энергию конденсатора как энергию электрического поля между его обкладками. Так как напряженность поля и, следовательно, плотность энергии остаются неизменными, а объем, занимаемый полем, возрастает, то увеличение энергии равно произведению плотности энергии $\varepsilon_0 E^2/2$ на приращение объема $S(d_2 - d_1)$.

Во втором случае энергия конденсатора изменяется как за счет механической работы, так и за счет работы, совершаемой источником питания:

$$W_2 - W_1 = A + A_{\text{ист}}. \tag{13}$$

Определив независимо изменение энергии конденсатора и работу источника, можно с помощью закона сохранения энергии (13) найти механическую работу.

Поскольку в этом случае остается неизменным напряжение, для расчета энергии конденсатора удобно использовать формулу $W = CU^2/2$. Для изменения энергии получаем

$$W_2 - W_1 = \frac{U_0^2}{2}(C_2 - C_1) = \frac{U_0^2}{2}\varepsilon_0 S\left(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1}\right). \tag{14}$$

При изменении заряда на обкладках конденсатора на величину $\Delta q = q_2 - q_1$ источник питания совершает работу $A_{\text{ист}} = U_0(q_2 - q_1)$. Заряд конденсатора определяется соотношением $q = CU_0$. Тогда

$$A_{\text{ист}} = U_0^2\varepsilon_0 S\left(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1}\right), \tag{15}$$

и с помощью выражения (13) получаем

$$A = \frac{1}{2}U_0^2\varepsilon_0 S\left(\frac{1}{d_2} - \frac{1}{d_1}\right).$$

Отметим, что из (15) и (14) видно, что

$$A_{\text{ист}} = 2(W_2 - W_1),$$

т. е. работа источника равна удвоенному изменению энергии конденсатора.

Интересно отметить, что как работа источника, так и изменение энергии конденсатора получились отрицательными. Это вполне понятно: совершаемая механическая работа положительна и должна была бы привести к увеличению энергии конденсатора (как и происходит в первом случае). Но энергия конденсатора убывает, и, следовательно, источник должен «принять на себя» энергию, равную убыли энергии конденсатора и механической работе внешних сил. Если процессы в источнике обратимы (аккумулятор), то он будет заряжаться, в противном случае источник просто нагревается.

Чтобы лучше разобраться в сути явлений, рассмотрим противоположный случай: присоединенные к источнику пластины конденсатора сближают от расстояния d_1 до расстояния d_2 ($d_2 < d_1$). Поскольку пластины притягиваются, работа внешних сил отрицательна, ибо для равномерного перемещения пластин внешняя сила должна быть направлена в сторону, противоположную перемещению. Энергия конденсатора при сближении пластин возрастает. Итак, механическая работа внешних сил отрицательна, а энергия конденсатора возросла, следовательно, источник совершил положительную работу. Половина этой работы равна увеличению энергии конденсатора, вторая половина передана внешним телам в виде механической работы при сближении пластин. Все приведенные выше формулы применимы, разумеется, при любом направлении перемещения пластин.

Во всех рассуждениях мы пренебрегали сопротивлением проводов, соединяющих конденсатор с источником. Если учитывать выделяющуюся в проводах при движении зарядов теплоту Q, уравнение

баланса энергии принимает вид

$$W_2 - W_1 + Q = A + A_{\text{ист}}.$$

Изменение энергии конденсатора и работа источника выражаются, конечно, прежними формулами (14) и (15). Теплота всегда выделяется независимо от того, сближаются или раздвигаются пластины, поэтому $Q > 0$. Значение Q можно вычислить, если известна скорость движения пластин. Чем больше скорость движения, тем больше выделяющаяся теплота. При бесконечно медленном движении пластин $Q = 0$.

Изменение энергии и работа источника. Выше мы отметили, что работа источника питания при раздвижении пластин равна удвоенному изменению энергии конденсатора. Этот факт носит универсальный характер: если любым способом изменить энергию подсоединенного к источнику питания конденсатора, то работа, совершаемая при этом источником питания, равна удвоенному значению изменения энергии конденсатора:

$$A_{\text{ист}} = 2\,\Delta W.$$

Как в этом убедиться? Поскольку конденсатор все время остается присоединенным к источнику питания, напряжение на конденсаторе равно U_0 как в начале, так и в конце процесса (хотя во время процесса напряжение на конденсаторе может быть и меньше). Если заряд конденсатора во время процесса изменился на величину Δq, то его энергия изменилась на величину

$$\Delta W = \frac{1}{2}\,U_0 q_2 - \frac{1}{2}\,U_0 q_1 = \frac{1}{2}\,U_0 \Delta q.$$

При этом источник питания совершил работу

$$A_{\text{ист}} = U_0\,\Delta q = 2\,\Delta W. \qquad (16)$$

Чтобы не возникало подозрений в том, что половина энергии «бесследно исчезла», напишем уравнение баланса энергии:

$$A_{\text{ист}} = \Delta W + A_1 + Q \qquad (17)$$

где A_1 — механическая работа, совершенная при этом процессе силами, действующими на внешние тела, а Q — выделившаяся теплота. Очевидно, что $A_1 + Q$ и равно оставшейся половине работы источника. Существуют такие процессы, в которых либо $A_1 = 0$, либо $Q = 0$. Но, как видно из (16) и (17), изменение энергии конденсатора, соединенного с источником, обязательно сопровождается либо совершением механической работы, либо выделением теплоты.

- Получите формулу для энергии заряженного конденсатора, рассматривая работу, совершаемую при его зарядке путем переноса заряда с одной обкладки на другую.

- Поясните качественно, почему объемная плотность энергии электрического поля пропорциональна квадрату его напряженности.
- Что такое собственная энергия точечного заряда? Как в электростатике преодолевается трудность, связанная с бесконечным значением собственной энергии точечных зарядов?
- Поясните, почему два первых слагаемых в правой части формулы (9) соответствуют объемной плотности собственных энергий точечных зарядов q_1 и q_2, а третье слагаемое — энергии взаимодействия зарядов друг с другом.
- Как связаны между собой изменение энергии конденсатора при каком-либо процессе и работа источника питания, к которому подсоединен этот конденсатор в течение всего процесса?
- При каких условиях изменение энергии конденсатора, соединенного с источником питания, не сопровождается выделением теплоты?

Δ **Конденсатор с диэлектриком.** Рассмотрим теперь энергетические превращения в конденсаторах при наличии диэлектрика между обкладками, считая для простоты его диэлектрическую проницаемость ε постоянной. Емкость конденсатора с диэлектриком в ε раз больше, чем емкость C такого же конденсатора без диэлектрика. Конденсатор с зарядом q, отсоединенный от источника питания, обладает энергией $W = q^2/(2C)$. При заполнении пространства между обкладками

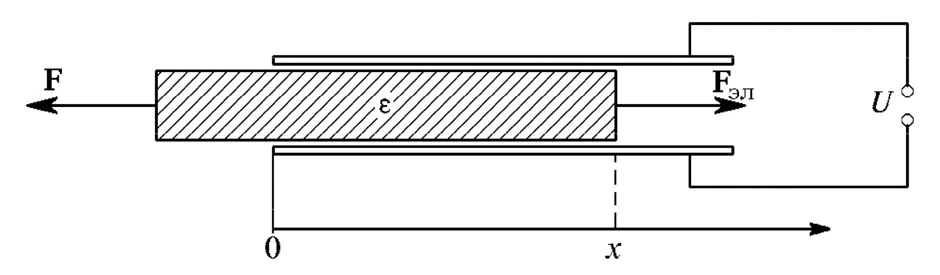


Рис. 52. Втягивание пластины из диэлектрика в плоский конденсатор

диэлектриком с проницаемостью ε энергия конденсатора уменьшится в ε раз: $W' = W/\varepsilon$. Отсюда сразу можно сделать вывод о том, что диэлектрик втягивается в электрическое поле.

Втягивающая сила при неизменном заряде конденсатора убывает по мере заполнения диэлектриком пространства между обкладками. Если на пластинах конденсатора поддерживается постоянное напряжение, то сила, втягивающая диэлектрик, не зависит от длины втянутой части.

Для нахождения силы, действующей на диэлектрик со стороны электрического поля, рассмотрим втягивание твердого диэлектрика в горизонтально расположенный конденсатор, соединенный с источником постоянного напряжения U (рис. 52). Пусть под действием интересующей нас втягивающей силы $\mathbf{F}_{эл}$ и какой-то внешней силы $\mathbf{F}$ кусок диэлектрика находится в равно-

весии и длина втянутой части при этом равна x. Допустим, что диэлектрик вдвинулся на расстояние Δx. Внешняя сила F при этом совершает отрицательную работу, равную $F\Delta x = -F_{эл}\Delta x$. Из закона сохранения энергии следует, что изменение энергии конденсатора ΔW равно сумме работы источника $A_{ист}$ и работы внешней силы $-F_{эл}\,\Delta x$:

$$\Delta W = A_{ист} - F_{эл}\,\Delta x. \tag{18}$$

Как мы знаем, $A_{ист} = 2\Delta W$, поэтому уравнение (18) можно переписать в виде

$$\Delta W = F_{эл}\,\Delta x. \tag{19}$$

Изменение энергии конденсатора при вдвигании диэлектрика на расстояние Δx равно

$$\Delta W = \frac{1}{2}\,U^2 \Delta C = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1) l \Delta x}{d}\,\frac{U^2}{2}, \tag{20}$$

где l — поперечный размер пластины.

С помощью формул (19) и (20) находим

$$F_{эл} = \frac{\Delta W}{\Delta x} = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1) l}{d}\,\frac{U^2}{2},$$

т. е. сила при вдвигании диэлектрика постоянна при неизменном напряжении.

Рассмотрим теперь задачу о втягивании жидкого диэлектрика в пространство между вертикальными пластинами плоского кон-

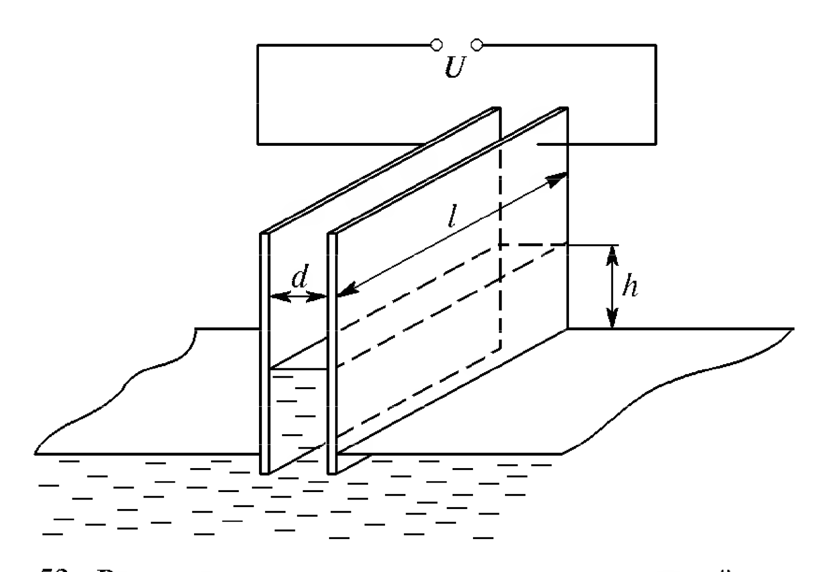


Рис. 53. Втягивание жидкого диэлектрика в плоский конденсатор

денсатора, соединенного с источником постоянного напряжения U (рис. 53). Определим, на какой высоте h установится уровень жидкости между пластинами при погружении их концов в жидкий диэлектрик с проницаемостью ε и плотностью ρ и сколько при этом выделится теплоты.

В состоянии равновесия сила, втягивающая диэлектрик в пространство между пластинами, уравновешивается силой тяжести P, действующей на поднятую жидкость: $P = \rho V g = \rho d l h g$. Для нахождения высоты подъема жидкого диэлектрика приравняем вычисленную втягивающую силу весу поднявшейся жидкости и получим

$$h = \frac{\varepsilon_0(\varepsilon - 1) l U^2}{2\rho g d^2}. \qquad (21)$$

Для нахождения выделившейся при подъеме жидкости теплоты проще всего исходить из закона сохранения энергии. Поскольку поднятый столб жидкости покоится, совершенная источником работа равна сумме изменений энергий конденсатора и потенциальной энергии диэлектрика в поле тяжести, а также выделившейся теплоты Q:

$$A_{\text{ист}} = \Delta W + \frac{1}{2}\, mgh + Q.$$

Учитывая, что $A_{\text{ист}} = 2\Delta W$, и пользуясь соотношением (21), находим

$$Q = \frac{\varepsilon_0^2\,(\varepsilon - 1)^2\, l U^4}{8\rho g d^3} = \frac{1}{2}\, mgh.$$

Таким образом, работа источника питания разделилась пополам: одна половина пошла на увеличение электростатической энергии конденсатора; вторая половина разделилась поровну между увеличением потенциальной энергии диэлектрика в поле тяжести и выделившейся теплотой. Как происходило выделение этой теплоты? При погружении пластин конденсатора в диэлектрик жидкость начинает подниматься, приобретая кинетическую энергию, и по инерции проскакивает положение равновесия. Возникают колебания, которые постепенно затухают из-за вязкости жидкости, и кинетическая энергия превращается в теплоту. Если вязкость достаточно велика, то колебаний может и не быть — вся теплота выделяется при подъеме жидкости до положения равновесия. ▲

- Сформулируйте закон сохранения энергии для процесса, в котором наряду с изменением электростатической энергии изменяется еще какая-либо энергия и происходит выделение теплоты.
- Поясните физический механизм возникновения сил, втягивающих диэлектрик в пространство между пластинами заряженного конденсатора.

II. ПОСТОЯННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

Направленное движение электрических зарядов называется *электрическим током*. Носителями заряда в зависимости от типа проводника могут быть электроны или ионы. В металлических проводниках — это электроны, в гальванических ваннах, т. е. в растворах электролитов, — положительные и отрицательные ионы, в плазме — электроны и положительные ионы.

Направлением тока условно принято считать направление движения положительных зарядов. Поэтому направление тока в металлах противоположно истинному направлению движения носителей заряда — электронов.

Для существования электрического тока необходимо наличие свободных носителей зарядов и электрического поля, которое вызывало бы их направленное движение. В отличие от электростатики, где рассматривается равновесие зарядов и поэтому электрическое поле в проводниках отсутствует, при наличии тока напряженность электрического поля внутри проводника отлична от нуля. Для создания такого поля необходим какой-либо внешний источник.

§ 10. Характеристики электрического тока. Закон Ома

При стационарном токе нигде в проводнике не должно происходить накопления носителей заряда. Поэтому такой ток может существовать только в замкнутой электрической цепи, где возможно непрерывное движение зарядов в одном направлении.

Для количественной характеристики электрического тока используются две основные величины: плотность тока $\mathbf{j}$ и сила тока I.

Плотность тока. *Плотность тока* $\mathbf{j}$ определяется зарядом, проходящим за единицу времени через единичную площадку, перпендикулярную направлению движения зарядов. Это векторная величина, равная произведению объемной плотности ρ движущихся зарядов на скорость $\mathbf{v}$ их направленного движения:

$$\mathbf{j} = \rho\mathbf{v}. \qquad (1)$$

Объемную плотность ρ можно представить как произведение заряда e одного носителя на их концентрацию n: $\rho = ne$. Поэтому формулу (1) можно записать в виде

$$\mathbf{j} = ne\mathbf{v}. \qquad (2)$$

Когда электрический ток создается одновременно несколькими сортами носителей, полная плотность тока равна векторной сумме вкладов отдельных сортов, для каждого из которых справедлива формула (2) со своими значениями n, e и $\mathbf{v}$.

В том, что формула (2) действительно характеризует заряд, пересекающий единичную площадку сечения проводника за одну секунду, можно убедиться, посмотрев на рис. 54*а*. Через единичную

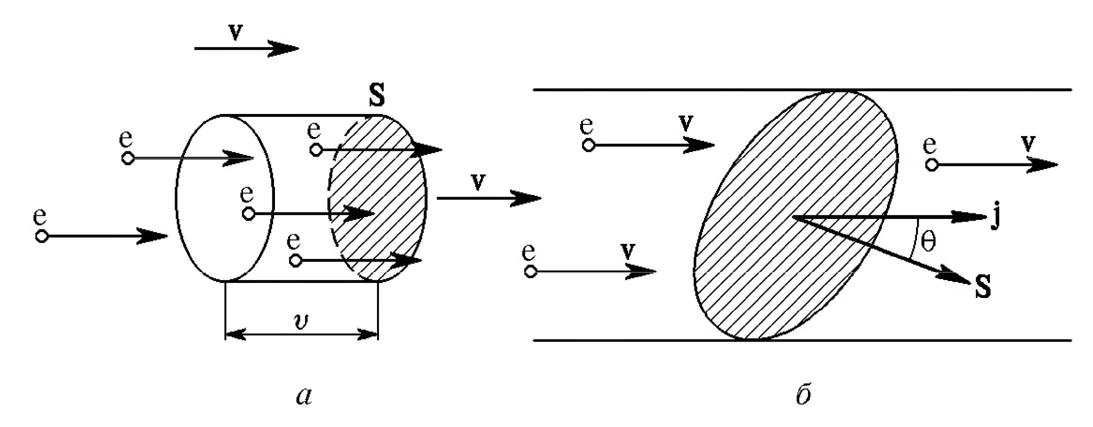


Рис. 54. К определению плотности тока (*а*) и силы тока (*б*)

площадку $\mathbf{S}$, ориентированную перпендикулярно скорости $\mathbf{v}$ носителей, за одну секунду проходят те носители, которые в начале этой секунды находятся внутри цилиндра с основанием единичной площади и высотой (длиной боковой поверхности), численно равной скорости направленного движения $\mathbf{v}$.

Обратим внимание на то, что вектор плотности тока $\mathbf{j}$ всегда направлен в ту же сторону, что и напряженность электрического поля $\mathbf{E}$, независимо от того, создается ли ток движением положительных или отрицательных зарядов.

Сила тока. *Сила тока* I определяется зарядом, проходящим за одну секунду через любое поперечное сечение проводника. Когда плотность тока одинакова по всему сечению, сила тока равна скалярному произведению плотности тока на площадь сечения:

$$I = \mathbf{j} \cdot \mathbf{S}, \qquad (3)$$

где вектор $\mathbf{S}$ направлен перпендикулярно выбранному сечению, а его модуль равен площади этого сечения. Поскольку вектор $\mathbf{S}$ для данного сечения проводника (рис. 54*б*) можно считать направленным как в одну, так и в противоположную сторону, сила тока I может быть как положительной, так и отрицательной. Если выбрать сечение перпендикулярно вектору плотности тока, то косинус угла θ между $\mathbf{j}$ и $\mathbf{S}$ равен либо $+1$, либо -1. Поэтому сила тока I равна либо jS, либо $-jS$ в зависимости от того, совпадает выбранное направление $\mathbf{S}$ с направлением движения положительных зарядов или противоположно ему.

Если плотность тока $\mathbf{j}$ не постоянна по сечению проводника, нужно это сечение мысленно разбить на малые участки $\Delta\mathbf{S}$, в пре-

делах которых плотность тока можно считать постоянной. Сила тока через каждый из них находится как $\mathbf{j}\,\Delta\mathbf{S}$, а полная сила тока получается суммированием по всем участкам. Поскольку заряд dq, переносимый за время dt через сечение S, равен

$$dq = \mathbf{j}\cdot\mathbf{S}dt,$$

то для силы тока справедливо

$$I = \frac{dq}{dt}. \qquad (4)$$

Если сила тока не изменяется со временем, ток называется *постоянным*.

Единица силы тока. Единицей силы тока в СИ служит *ампер* (А). Ампер входит в число основных единиц этой системы и вводится на основе магнитного взаимодействия токов. В системе СГСЭ единица силы тока является производной и определяется как сила такого тока, при котором через поперечное сечение проводника за одну секунду проходит единичный заряд. Ее размерность $\dim I = \dim (Q/t) = M^{1/2}L^{3/2}T^{-2}$. Так как 1 Кл = 1 А·1 с, то

$$1\ \text{А} = 3\cdot 10^9\ \text{ед. СГСЭ}.$$

Действия электрического тока. Движение электронов и ионов непосредственно увидеть невозможно. Однако это движение вызывает различные сопутствующие явления, по которым и можно судить о наличии тока и его силе.

Еще в 1820 г. Х. К. Эрстед обнаружил, что проводник с током вызывает появление сил, действующих на магнитную стрелку. Если расположить прямой металлический провод параллельно магнитной стрелке, установившейся вдоль силовых линий магнитного поля Земли, то при пропускании по нему сильного тока стрелка отклоняется, стремясь установиться поперек провода. Если изменить направление тока, стрелка отклоняется в противоположную сторону. Отклонение стрелки наблюдается и в том случае, если вместо металлического проводника постоянный ток пропускать по газоразрядной трубке или трубке с электролитом. *Магнитное действие* проявляется во всех случаях независимо от природы проводника и является самым общим признаком электрического тока.

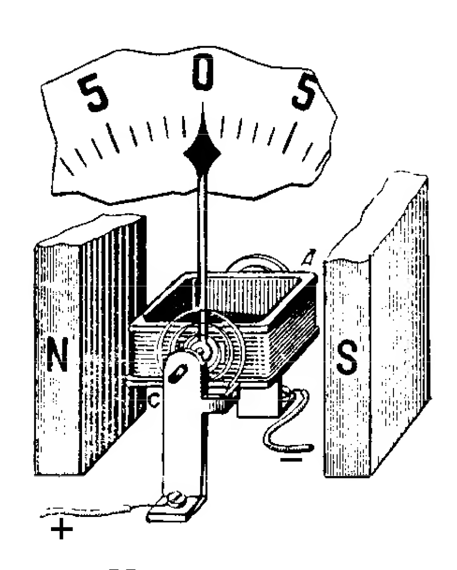


Рис. 55. Упрощенное устройство магнитоэлектрического прибора

Магнитное действие тока используется для измерения силы тока. Например, в приборах магнитоэлектрической системы (рис. 55) имеется легкая проволочная рамка, укреп-

ленная на спиральной пружине и помещенная между полюсами постоянного магнита. При пропускании тока на рамку действует момент сил, пропорциональный силе тока. Этот момент поворачивает рамку, закручивая пружину. По углу поворота рамки можно судить о силе тока. Приборы, показания которых зависят от силы тока, имеют общее название *гальванометров*. Магнитное действие тока используется в электродвигателях.

Электрический ток вызывает нагревание проводников. На *тепловом действии* тока основана работа разнообразных электронагревательных приборов, плавильных печей и т. п.

В некоторых видах проводников прохождение электрического тока вызывает *химическое действие*, заключающееся в разложении вещества на составные химические части. Такой процесс называется *электролизом*.

Проводники, в которых не проявляется химическое действие тока, называются проводниками первого рода. К их числу принадлежат металлы, полупроводники и некоторые химические соединения. Проводники, в которых происходит электролиз, называются проводниками второго рода или электролитами. К ним относятся многие водные растворы кислот и солей и некоторые химические соединения в жидком и твердом состояниях.

Закон Ома. Существует много способов вызвать направленное движение электрических зарядов Например, в электростатическом генераторе Ван-де-Граафа (рис. 56), который использовался в первых ускорителях заряженных частиц, электрические заряды сообщаются движущейся резиновой ленте *4* и поднимаются ею наверх в изолированный металлический купол *1*, где они накапливаются. Такой способ приведения зарядов в движение можно назвать механическим. Аналогично заряженные капли воды при падении под действием силы тяжести в атмосфере создают электрический ток — часть системы электрических токов Земли.

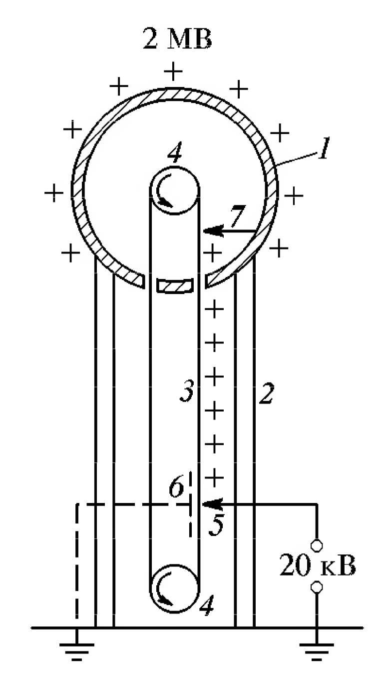


Рис. 56. Электростатический генератор Ван-де-Граафа

Более обычный способ создания тока — действие на носители заряда силы со стороны электрического поля. Результат этого действия зависит от физической природы среды, в которой действует это поле. Для большого круга веществ, в частности металлов, в широком диапазоне условий, закономерности электрического тока описываются простым эмпирическим соотношением, называемым *законом Ома*.

Как показывает опыт, для многих веществ в широких пределах плотность электрического тока $\mathbf{j}$ пропорциональна

напряженности электрического поля **E** в веществе:

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \tag{5}$$

где σ — постоянная для данного вещества величина, называемая *удельной проводимостью* или просто *проводимостью*. Ее значение у каждого вещества зависит от его физического состояния: от температуры, давления и т. п.

Закон Ома справедлив для однородных тел, физические свойства которых во всех точках одинаковы. Формула (5) остается справедливой и в случае неоднородных тел, но тогда проводимость σ является функцией координат, т. е. в каждом месте имеет свое значение.

Однородные и изотропные проводники. Формула (5) относится к изотропным веществам, свойства которых одинаковы по всем направлениям. Внутри большинства проводников любые три взаимно перпендикулярных направления физически эквивалентны. В металлах атомы образуют анизотропную кристаллическую решетку, но любой макроскопический образец — кусок металла — состоит обычно из большого числа случайно ориентированных маленьких кристалликов, что приводит к эквивалентности всех направлений. В результате вектор **j** имеет то же направление, что и вектор **E**.

Вспоминая о том, что плотность тока **j** пропорциональна скорости v упорядоченного движения носителей заряда, а напряженность поля **E** характеризует действующую на них силу, приходим к выводу, что равенство (5) фактически означает пропорциональность между скоростью движения и действующей силой. Мы видим, что для поддержания постоянного тока, т. е. движения зарядов с постоянной скоростью, необходимо непрерывное действие силы. Но это значит, что в проводниках происходит рассеяние носителей заряда, эквивалентное их движению с трением. В противном случае действующая на них электрическая сила вызывала бы их ускоренное, а не равномерное движение. Другими словами, проводники обладают электрическим сопротивлением.

Удельное сопротивление. Для характеристики электрического сопротивления вводится величина, обратная его удельной проводимости σ, называемая *удельным сопротивлением* ρ:

$$\rho = 1/\sigma. \tag{6}$$

Закон Ома является одним из самых ранних экспериментальных открытий в области электрического тока в веществе. Его нельзя вывести теоретически только из законов электродинамики, описывающих электрическое поле. Закон Ома можно получить в рамках микроскопического подхода на основе изучения процессов, происходящих в веществе при приложении электрического поля, используя какую-либо определенную модель вещества.

В металлах электрическое сопротивление обусловлено рассеянием электронов проводимости на тепловых колебаниях кристалли-

ческой решетки и хаотически расположенных дефектах кристалла — в идеальной строго периодической решетке сопротивление отсутствовало бы. В разных веществах процессы могут сильно различаться, но независимо от характера рассеяния носителей связь между плотностью тока и напряженностью поля при не слишком сильных полях всегда оказывается линейной.

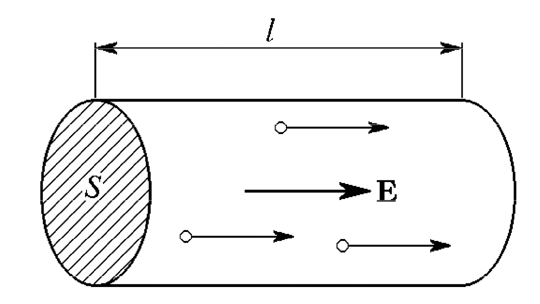


Рис. 57. К закону Ома для однородного участка цепи

Закон Ома для однородного участка. Постоянное электрическое поле **E** внутри участка однородного проводника можно создать, приложив к концам этого участка некоторое напряжение (разность потенциалов) U и поддерживая его неизменным. Если длина этого однородного участка равна l (рис. 57), то очевидно, что $E = U/l$. Сила тока I в любом сечении равна произведению плотности тока j на площадь S сечения: $I = jS$. Поэтому из закона Ома (5) $j = \sigma E$ следует

$$I = \frac{\sigma S}{l} U \tag{7}$$

— сила тока I пропорциональна приложенному напряжению. Если ввести *сопротивление* R для рассматриваемого однородного участка соотношением

$$R = \rho \frac{l}{S}, \tag{8}$$

то, учитывая, что $\sigma = 1/\rho$, формулу (7) можно записать в виде

$$I = \frac{U}{R}. \tag{9}$$

Равенство (9) называют *законом Ома для однородного участка цепи*. Именно в таком виде этот закон и был установлен немецким физиком Г. Омом в 1826 г.

Сопротивление и его единицы. Сопротивление R, определяемое формулой (8), характеризует определенный образец проводника (например, проволоку круглого сечения) и зависит как от материала проводника (ρ), так и от его геометрических размеров l и S, в то время как удельное сопротивление ρ от геометрии образца не зависит.

Единица сопротивления устанавливается на основе закона Ома (9). В СИ эта единица называется *омом* (Ом). 1 Ом — это сопротивление такого проводника, в котором при приложении напряжения 1 В возникает ток силой 1 А: 1 Ом = 1 В / 1 А. Единица сопротивления в системе СГСЭ также устанавливается на основе (9), но практически не применяется.

Удельное сопротивление ρ — это сопротивление проводника длиной 1 м с площадью поперечного сечения 1 м^2. Единица удельного со-

противления — 1 Ом·м. На практике для удельного сопротивления часто используется внесистемная единица 1 Ом·мм^2/м = 10^{-6} Ом·м, которая удобна при расчете электрического сопротивления проволок.

В технике словом «сопротивление» иногда обозначают специальные устройства, включаемые в электрическую цепь и обладающие

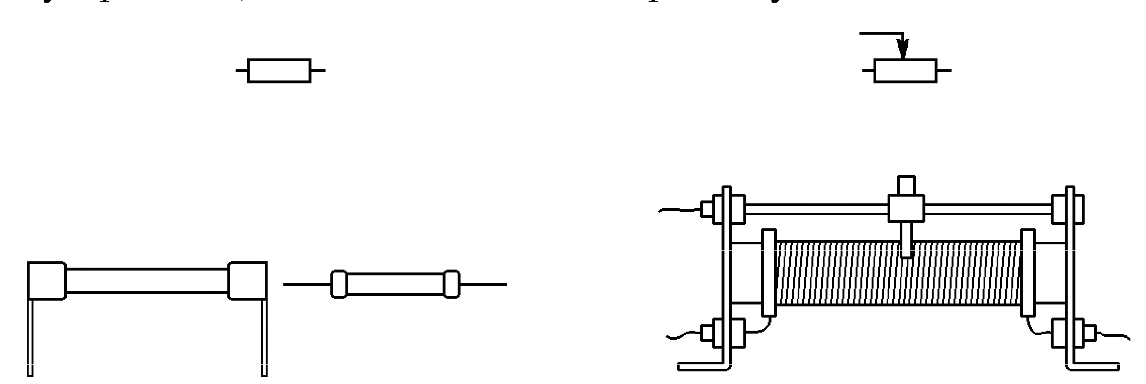


Рис. 58. Резисторы и их условные обозначения на электрических схемах

электрическим сопротивлением. Такие устройства называются *резисторами*. На рис. 58 изображены *реостат* — резистор с переменным (регулируемым) сопротивлением и постоянный резистор, а также их условные обозначения на схемах электрических цепей.

Зависимость сопротивления от температуры. Электрическое сопротивление зависит от температуры, причем эта зависимость разная у разных веществ. Особенно сильной температурной зависимостью отличается удельное сопротивление тех веществ, у которых с изменением температуры меняется концентрация носителей заряда, как это бывает в полупроводниках и в плазме. В металлах изменение сопротивления с температурой связано не с изменением концентрации электронов, а с изменением интенсивности колебаний кристаллической решетки, которыми в основном и обусловлено сопротивление их движению. Удельное сопротивление металла линейно зависит от температуры в широком интервале ее изменения:

$$\rho = \rho_0(1 + \alpha t), \qquad (10)$$

где t — температура металла по шкале Цельсия, ρ_0 — удельное сопротивление при 0 °C, а α — температурный коэффициент сопротивления, характеризующий относительное изменение удельного сопротивления проводника при изменении его температуры на один кельвин (градус). Опыт показывает, что для чистых металлов в интервале температур от 0 до 100 °C температурный коэффициент сопротивления практически постоянен и для всех металлов имеет почти одно и то же значение, близкое к 1/273 на градус температуры.

Изменение геометрических размеров металлических проводников с температурой гораздо меньше изменения их удельного сопротивления. Поэтому зависимость R любого металлического образца от температуры дается той же формулой (10). Существуют сплавы (константан, манганит), у которых при нагревании удельное сопро-

тивление практически не меняется. Их применяют для изготовления проволочных резисторов с постоянным сопротивлением.

Вольт-амперная характеристика. В технических приложениях для описания процессов в электрических цепях часто используется понятие *вольт-амперной характеристики.* Вольт-амперная характеристика какого-либо устройства — это график зависимости силы тока в нем от приложенного к нему напряжения: $I = I(U)$. Для проводников, подчиняющихся закону Ома, вольт-амперная характеристика в соответствии с (9) представляет собой прямую, проходящую через начало координат (рис. 59). Ее наклон определяется сопротивлением R рассматриваемого устройства. В обычных проводниках сопротивление не зависит от направления тока, поэтому прямую на вольт-амперной характеристике можно продолжить и в область отрицательных значений I и U.

При использовании вольт-амперных характеристик следует помнить о связанных с ними ограничениях. Например, для конкретного устройства никогда нельзя считать, что прямая на рис. 59 тянется до

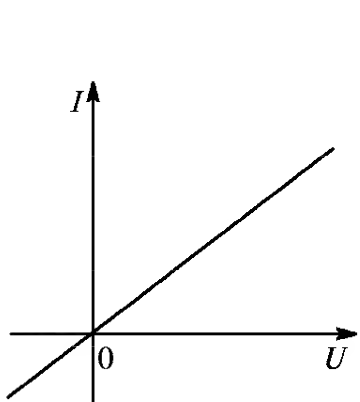


Рис. 59. Вольт-амперная характеристика проводника, подчиняющегося закону Ома

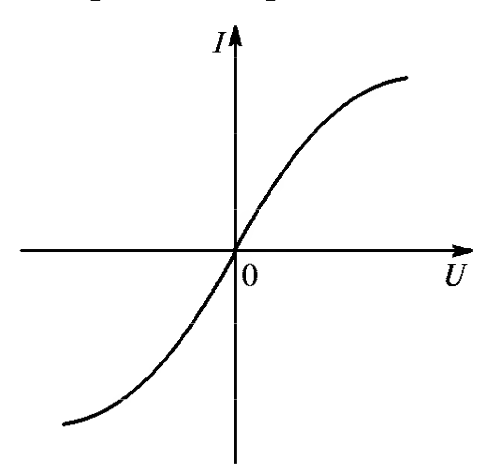


Рис. 60. Вольт-амперная характеристика лампочки накаливания. Сила тока измеряется после установления стационарного значения температуры

бесконечности. В частности, при измерении вольт-амперной характеристики лампочки накаливания с вольфрамовой нитью мы обнаружим, что она имеет вид, схематически изображенный на рис. 60. Искривление вольт-амперной характеристики связано с нагревом нити и увеличением сопротивления нити накала с ростом температуры.

В некоторых устройствах, таких как диоды, сопротивление зависит от направления тока. В одном направлении носители заряда проходят по нему как по обычному резистору с некоторым почти постоянным сопротивлением. Однако при противоположной полярности приложенного напряжения носители заряда испытывают большее сопротивление движению. Фактически кривая на графике не изменяет резко своего наклона при равном нулю напряжении, а постепенно переходит от одного наклона к другому в интервале значений напряжения в несколько десятых вольта.

Иногда вольт-амперные характеристики отражают немонотонную зависимость тока от напряжения. Например, на вольт-амперной характеристике электрической дуги, горящей между угольными или металлическими электродами имеется: падающий участок, соответствующий увеличению тока при уменьшении напряжения между электродами.

Линейные и нелинейные явления в электрических цепях. Закон Ома (9) описывает *линейные* явления в электрических цепях. Всякое отклонение от закона Ома, выражающееся в искривлении вольт-амперной характеристики, соответствует *нелинейным* явлениям при прохождении тока. *Нелинейные* явления встречаются гораздо чаще, чем это может показаться на первый взгляд. Нелинейность присуща даже обыкновенной лампочке накаливания, хотя ее нить накала сделана из металла, для которого закон Ома точно выполняется вплоть до очень больших значений плотности тока, намного превосходящих номинальное.

Дифференциальное сопротивление. Но на достаточно малых участках практически любой нелинейной вольт-амперной характеристики связь между изменениями напряжения и тока можно считать линейной: малому изменению напряжения соответствует пропорциональное изменение силы тока:

$$\Delta U = R(I)\,\Delta I, \tag{11}$$

где величина $R(I)$, определяющая наклон данного участка вольт-амперной характеристики, называется *дифференциальным сопротивлением*. Для падающих участков вольт-амперной характеристики дифференциальное сопротивление отрицательно.

- Каковы условия существования электрического тока?
- Почему для существования стационарного тока необходима замкнутая электрическая цепь?
- Как связаны между собой векторная характеристика тока — плотность тока и скалярная характеристика — сила тока I?
- Как плотность тока выражается через концентрацию носителей заряда и скорость их направленного движения?
- Какие действия электрического тока можно использовать для измерения силы тока?
- Почему из установленной на опыте пропорциональности между плотностью тока и напряженностью поля в проводнике следует вывод о существовании электрического сопротивления?
- Какие предположения используются при получении соотношения $I = U/R$ из закона Ома $j = \sigma E$?
- Установите связь между омом и единицей сопротивления в системе СГСЭ.

- С чем связана зависимость удельного сопротивления разных веществ от температуры?
- Объяснитс физичсскис причины нслинсйности вольт-ампсрной характс-ристики лампочки накаливания.
- Что такое дифференциальное сопротивление? Какой смысл имеют его отрицательные значения?

§ 11. Соединение проводников в электрические цепи

Электрические цепи содержат, как правило, несколько различных соединенных между собой проводников. Простейшая электрическая цепь имеет один «вход» и один «выход», т. е. два зажима, к которым можно присоединять провода. По этим проводам заряды могут втекать в цепь и вытекать из нее. Если ток в цепи стационарен, т. е. в ней не происходит накопления электрических зарядов, то сила тока на входе и на выходе должна быть одинакова.

Эквивалентное сопротивление цепи. Если взять цепь, состоящую из многих соединенных между собой различных проводников, и выбрать в ней две точки в качестве входа и выхода, то для этих точек мы можем считать всю цепь эквивалентной одному-единственному резистору. В этом случае можно говорить о токе I в этой цепи и о напряжении U «между зажимами» или «на зажимах», что означает разность электрических потенциалов между входом и выходом. Отношение U/I можно рассматривать как сопротивление R эквивалентного всей цепи резистора. Когда для всех отдельных элементов такой цепи справедлив закон Ома, значение эквивалентного сопротивления легко может быть рассчитано.

Последовательное соединение. Начнем с простейших случаев. Когда несколько проводников или резисторов соединены последовательно (рис. 61), сила тока в каждом из них одна и та же, а напряжение на зажимах всей схемы равно сумме напряжений на отдельных резисторах:

I I I I

R_1 R_2 R_n $R = R_1 + R_2 + \ldots + R_n$

Рис. 61. Последовательное соединение резисторов

$$U = U_1 + U_2 + \ldots + U_n. \quad (1)$$

Поскольку для каждого резистора в соответствии с законом Ома $U_i = IR_i$, то (1) можно записать в виде

$$U = I(R_1 + R_2 + \ldots + R_n) = IR, \quad (2)$$

откуда

$$R = R_1 + R_2 + \ldots + R_n, \tag{3}$$

т. е. при последовательном соединении проводников или резисторов их сопротивления складываются.

Параллельное соединение. Когда несколько проводников или резисторов соединены параллельно (рис. 62), то напряжения одинаковы

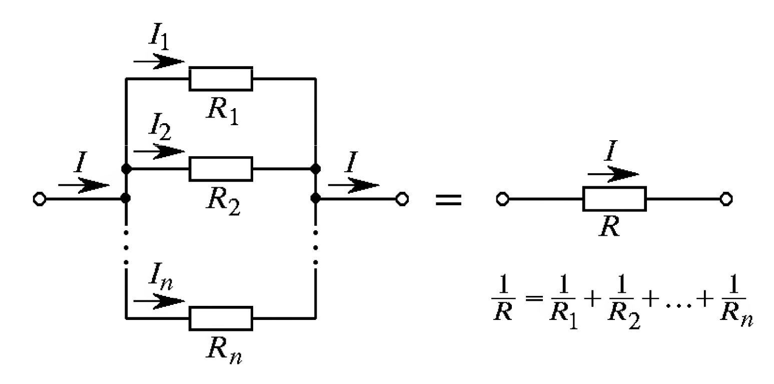


Рис. 62. Параллельное соединение резисторов

на всех резисторах: они равны приложенному напряжению U. Сила тока I на входе и на выходе равна сумме сил токов в отдельных ветвях параллельной цепи:

$$I = I_1 + I_2 + \ldots + I_n. \tag{4}$$

Подставляя сюда $I = U/R$ вместо левой части и $I_i = U/R_i$ вместо всех слагаемых правой части, получаем

$$\frac{U}{R} = U\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n}\right), \tag{5}$$

откуда

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \ldots + \frac{1}{R_n}, \tag{6}$$

т. е. при параллельном соединении проводников или резисторов складываются величины, обратные их сопротивлениям, — проводимости. Сопротивление параллельной цепи всегда меньше сопротивления любого входящего в нее резистора.

Эквивалентные схемы. Схемы многих электрических цепей можно упрощать, шаг за шагом заменяя группы последовательно или параллельно соединенных резисторов их эквивалентами в соответствии с рис. 61 и 62, переходя тем самым к эквивалентной схеме всей исходной цепи. Пример поэтапного перехода к эквивалентной схеме показан на рис. 63. Первоначальная схема, при всей ее запутанности, может быть шаг за шагом сведена к комбинациям последовательного или параллельного соединений.

Однако не любую электрическую схему можно свести к комбинациям последовательных и параллельных соединений. Уже простая

схема «моста» на рис. 64 не может быть исследована подобным способом. При расчете таких разветвленных цепей следует руководствоваться следующими правилами:

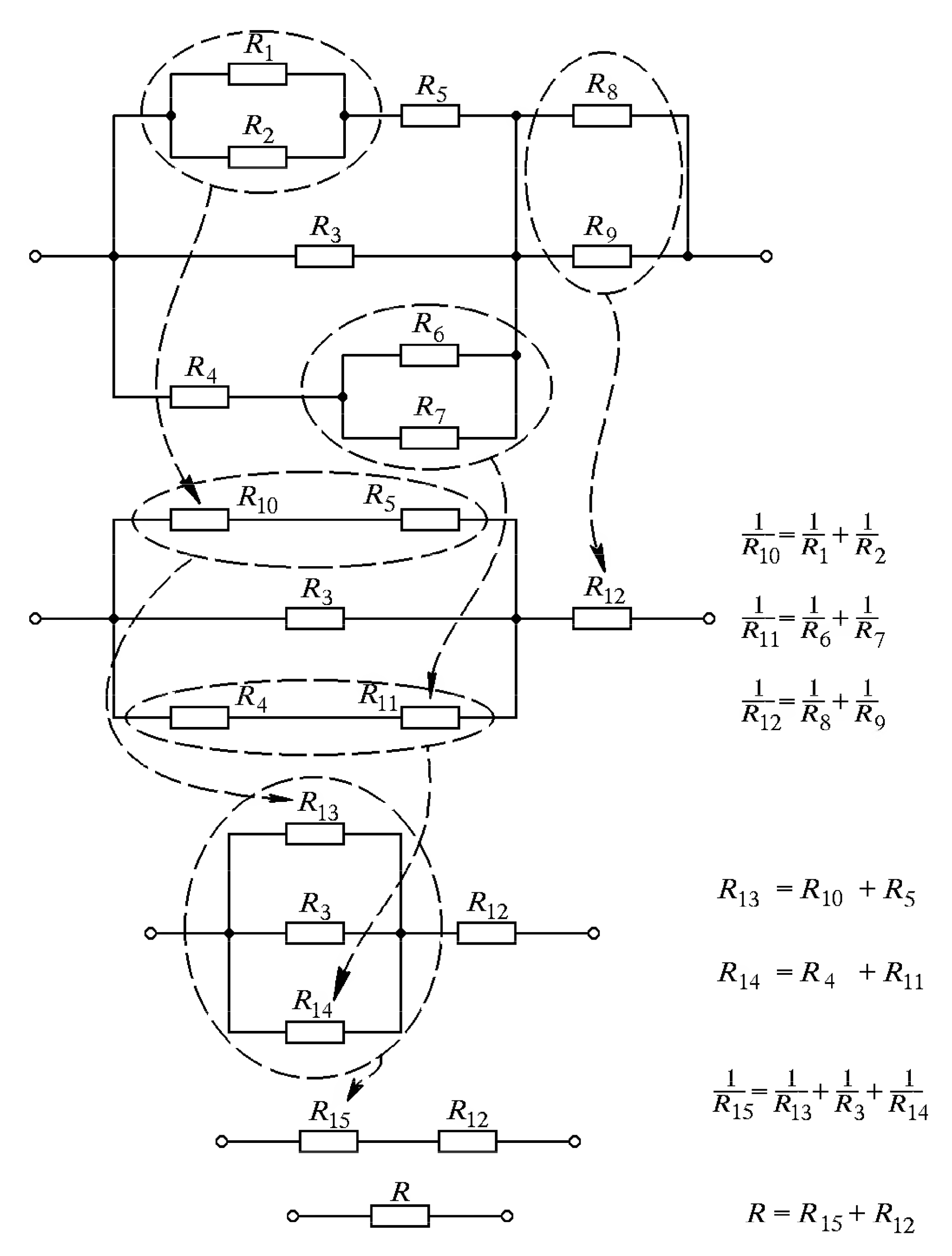


Рис. 63. На каждом этапе перехода к эквивалентной схеме используются правила для последовательных и параллельных соединений

1. Для каждого резистора справедлив закон Ома, т. е. напряжение на нем равно произведению силы тока в резисторе на его сопротивление.

2. В любом узле, т. е. точке, где сходятся более двух проводов, алгебраическая сумма токов равна нулю: сумма втекающих в узел токов равна сумме вытекающих.

3. Сумма напряжений на отдельных участках цепи при проходе по любому пути от входа к выходу равна полному приложенному напряжению.

Расчет мостовой схемы. Проиллюстрируем применение этих правил для изображенной на рис. 64 схемы, рассмотрев для упрощения алгебраических выкладок частный случай, когда равны между собой

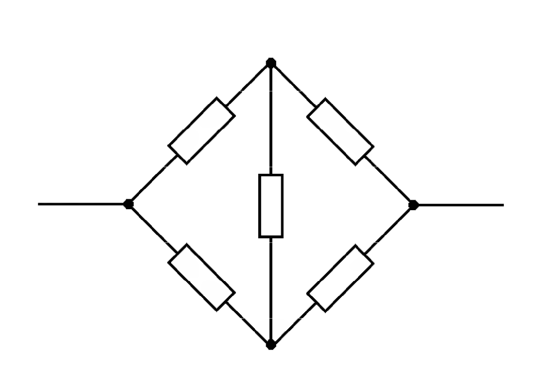


Рис. 64. Пример цепи, которая не сводится к комбинации последовательных и параллельных соединений

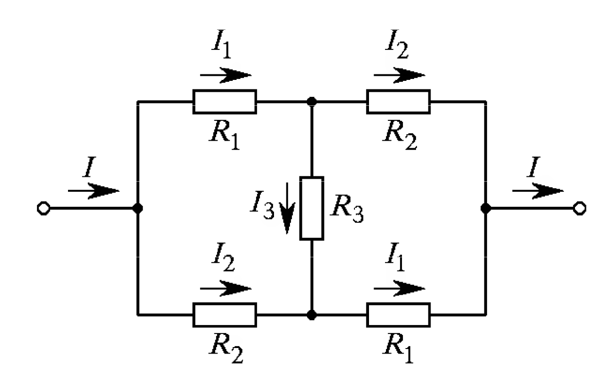


Рис. 65. К расчету симметричной мостовой схемы

значения сопротивлений некоторых резисторов (рис. 65). Прежде всего назначим направление токов в каждом звене на пути от входа к выходу. Из симметрии схемы следует, что силы токов в резисторах с одинаковыми значениями сопротивлений равны между собой, и на рис. 65 они обозначены одной буквой. Действительно, если поменять местами вход и выход цепи, то получим схему, неотличимую от исходной.

Выпишем уравнения для сил токов в каждом из узлов в соответствии со вторым из приведенных правил. Из-за симметрии схемы это дает два независимых уравнения:

$$I = I_1 + I_2, \qquad I_1 = I_2 + I_3. \tag{7}$$

Далее составим уравнения, соответствующие третьему правилу, для сумм напряжений на отдельных участках при проходе от входа к выходу по разным путям. Вследствие симметрии схемы получаются два независимых уравнения, соответствующих, например, пути, пролегающему через R_1 и R_2 по верхней (или по нижней) ветви, и пути через R_1, R_3 и R_1:

$$I_1R_1 + I_2R_2 = U, \qquad I_1R_1 + I_3R_3 + I_1R_1 = U. \tag{8}$$

Решая систему линейных уравнений (7)—(8), получаем формулу, выражающую ток I в цепи через приложенное к ее зажимам напряжение U и значения сопротивлений входящих в нее резисторов:

$$I = U\frac{R_1 + R_2 + 2R_3}{2R_1R_2 + (R_1 + R_2)R_3}. \tag{9}$$

Теперь для сопротивления $R = U/I$ всей цепи, т. е. сопротивления эквивалентного ей резистора, получаем

$$R = \frac{2R_1R_2 + (R_1 + R_2)R_3}{R_1 + R_2 + 2R_3}. \tag{10}$$

Полезно убедиться в том, что формула (10) дает правильные значения полного сопротивления во всех предельных и частных случаях:

$$R_1 = R_2, \quad R = R_1, \qquad R_3 = 0, \quad R = \frac{2R_1R_2}{R_1 + R_2},$$

$$R_3 \to \infty, \; R = \frac{R_1 + R_2}{2}, \qquad R_1 \to \infty \quad R = 2R_2 + R_3.$$

Измерения в электрических цепях. Для измерения токов и напряжений в электрических цепях используются амперметры и вольтметры, основным элементом которых служит гальванометр. Важно, чтобы при включении в цепь для измерений эти приборы вносили как можно меньше искажения в измеряемую величину.

Амперметр включается в цепь последовательно. Поэтому его собственное (внутреннее) сопротивление должно быть как можно меньше. Для этого гальванометр снабжают шунтом: вход и выход гальванометра соединяются некоторым сопротивлением, обеспечивающим параллельный катушкам дополнительный путь для тока (рис. 66). Поэтому внутреннее сопротивление амперметра меньше, чем у примененного в нем гальванометра. Амперметр называется идеальным, если внутреннее сопротивление можно считать равным нулю.

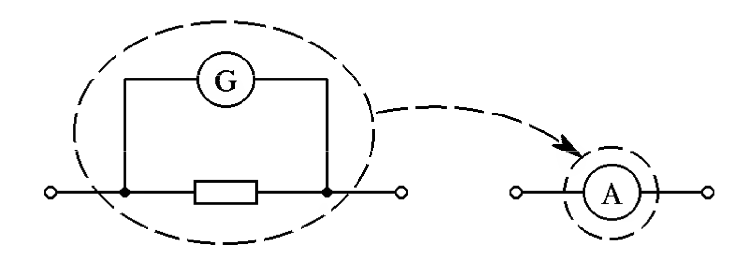


Рис. 66. Схематическое устройство амперметра

Вольтметр подключается к цепи параллельно тому участку, напряжение на котором требуется измерить. Чтобы процесс измерения меньше искажал значение измеряемого напряжения, собственное (внутреннее) сопротивление вольтметра должно быть как можно больше. Поэтому в вольтметре последовательно катушкам гальванометра включено некоторое сопротивление (рис. 67). Внутреннее сопротивление вольтметра, как правило, значительно больше сопротивления входящего в него гальванометра. Вольтметр называется идеальным, если его внутреннее сопротивление можно считать бесконечно большим.

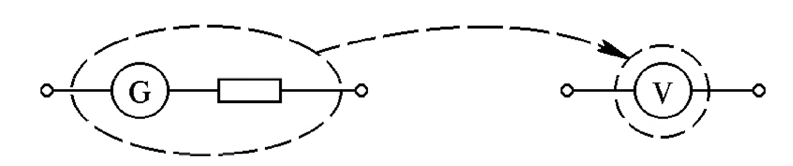


Рис. 67. Схематическое устройство вольтметра

Каждый измерительный прибор рассчитан на определенный интервал значений измеряемой величины, и в соответствии с этим проградуирована его шкала. Для расширения пределов измерений в амперметре можно использовать добавочный шунт, а в вольтметре — добавочное сопротивление.

Шунт для амперметра. Если амперметр рассчитан на максимальную силу тока I, а мы хотим с его помощью измерять силу тока, в n раз большую, то очевидно, что через шунт при этом должен протекать ток силой $(n-1)I$ (рис. 68). Поскольку шунт включен параллельно амперметру, то

$$R_{ш} = \frac{R_а}{n-1}. \tag{11}$$

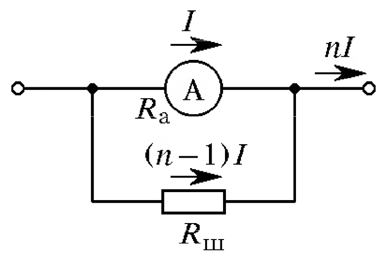


Рис. 68. Шунтирование амперметра



Рис. 69. Добавочное сопротивление к вольтметру

Добавочное сопротивление для вольтметра. Если вольтметр рассчитан на максимальное напряжение U, а мы хотим с его помощью измерять напряжения, в n раз большие, то очевидно, что на концах добавочного сопротивления должно быть напряжение $(n-1)U$ (рис. 69). Поскольку добавочное сопротивление включено последовательно с вольтметром, то

$$R_д = R_в(n-1). \tag{12}$$

Приведенные значения $R_ш$ и $R_д$ соответствуют увеличению в n раз максимального показания прибора. То же самое справедливо,

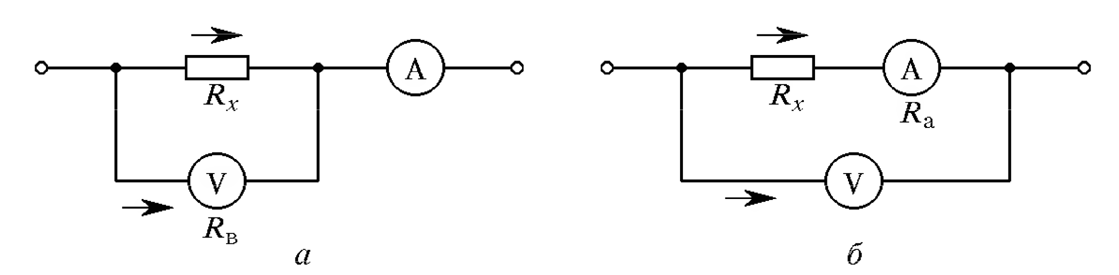


Рис. 70. Измерение неизвестного сопротивления R_x с помощью амперметра и вольтметра

разумеется, и для любого другого значения шкалы прибора: измеряемая величина в n раз больше показания прибора.

С помощью амперметра и вольтметра можно измерить сопротивление резистора, в котором поддерживается постоянный ток. Для этого можно воспользоваться любой из схем, показанных на рис. 70. В случае использования схемы *а* неизвестное сопротивление выражается через показания приборов I и U по формуле

$$R_x = \frac{U}{I - U/R_в}. \tag{13}$$

При использовании схемы *б* для неизвестного сопротивления справедливо

$$R_x = \frac{U}{I} - R_а. \qquad (14)$$

Первая схема удобна для измерения сопротивлений, много меньших сопротивления вольтметра $R_в$, вторая — для измерения сопротивлений, много больших сопротивления амперметра $R_а$. В обоих случаях R_x с большой точностью можно считать равным просто отношению показаний приборов U/I.

Мост Уитстона. Для точного измерения сопротивлений можно использовать метод сравнения сопротивлений, не требующий измерения тока и напряжения. В этом методе используется так называемый *мост Уитстона*, содержащий четыре сопротивления, одно из которых неизвестно (рис. 71). Переменное сопротивление R подбирают таким образом, чтобы ток через гальванометр G был равен нулю. При этом через сопротивления R_1 и R_2 идет одинаковый ток I_1, а через R и R_x — тоже одинаковый ток I. Разность потенциалов между точками A и B равна нулю. Поэтому одинаковы напряжения на сопротивлениях R_1 и R:

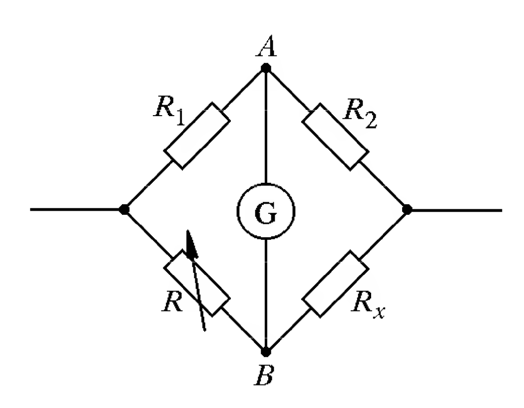


Рис. 71. Мост Уитстона

$$I_1R_1 = IR, \qquad (15)$$

и на сопротивлениях R_2 и R_x:

$$I_1R_2 = IR_x. \qquad (16)$$

Разделив почленно равенства (15) и (16), получаем

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R}{R_x},$$

откуда

$$R_x = R\frac{R_2}{R_1}. \qquad (17)$$

Для каждого моста отношение R_2/R_1 фиксировано и может быть заранее измерено с предельной точностью. В качестве переменного сопротивления R, подбором которого осуществляют балансировку моста, обычно используют магазины сопротивлений.

Рассмотрим некоторые примеры, связанные с расчетом электрических цепей, содержащих резисторы и измерительные приборы. Сформулируем их в виде задач.

Задачи

1. *Погрешность при измерении сопротивления.* Найдите относительную погрешность измерения сопротивления по схемам на рис. 70, если для расчета сопротивления R_x по показаниям приборов U и I вместо использования точных формул (13) и (14) считать приближенно, что $R_x \approx U/I$.

Решение Относительной погрешностью измерения называют отношение абсолютной погрешности к значению измеряемой величины. Абсолютная погрешность (или ошибка измерения) — это разность между полученным при измерении и истинным значениями измеряемой величины. Подчеркнем, что в данном случае речь идет о систематических погрешностях, обусловленных применяемым методом измерения, а не о погрешностях самих приборов.

В случае рис. 70*а* истинное значение сопротивления R_x дается формулой (13), в которую кроме получаемых при измерениях значений U и I входит внутреннее сопротивление вольтметра $R_в$. Абсолютная погрешность измерений ΔR_x есть

$$\Delta R_x = \frac{U}{I} - R_x = \frac{U}{I}\left(1 - \frac{1}{1 - U/(IR_в)}\right). \qquad (18)$$

Разделив это выражение на R_x из (13), получим относительную погрешность

$$\frac{\Delta R_x}{R_x} = -\frac{U}{IR_в}. \qquad (19)$$

Считая, что относительная погрешность невелика (в противном случае такое измерение вообще теряет смысл), т. е. значение R_x близко к отношению U/I, переписываем (19) в виде

$$\frac{\Delta R_x}{R_x} \approx -\frac{R_x}{R_в}. \qquad (20)$$

Знак минус говорит о том, что такой метод измерения R_x всегда дает несколько заниженное значение R_x. Модуль относительной погрешности тем меньше, чем больше внутреннее сопротивление вольтметра по сравнению с измеряемым сопротивлением. Относительная погрешность здесь не зависит от сопротивления амперметра.

В случае рис. 70*б* истинное значение сопротивления R_x дается формулой (14), в которую входит внутреннее сопротивление амперметра $R_а$. Абсолютная погрешность

$$\Delta R_x = \frac{U}{I} - R_x = R_а \qquad (21)$$

в данном случае просто равна сопротивлению амперметра $R_а$. Разделив $R_а$ на R_x, получим относительную погрешность

$$\frac{\Delta R_x}{R_x} = \frac{R_а}{U/I - R_а}. \qquad (22)$$

Когда относительная погрешность мала, значение измеряемой величины R_x близко к U/I. Поэтому

$$\frac{\Delta R_x}{R_x} \approx \frac{R_а}{R_x}. \qquad (23)$$

В данном случае относительная погрешность не зависит от внутреннего сопротивления вольтметра и будет тем меньше, чем больше измеряемое сопротивление по сравнению с сопротивлением амперметра. Этот метод всегда дает несколько завышенное значение R_x.

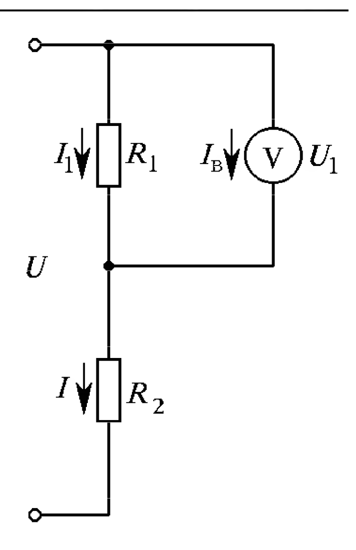


Рис. 72. Делитель напряжения

2. *Делитель напряжения.* В делителе напряжения, образованном резисторами R_1 и R_2, отношение сопротивлений которых $R_1/R_2 = 2/3$, вольтметр, подключенный к R_1 (рис. 72), показывает напряжение $U_1 = 20$ В, когда к делителю приложено напряжение $U = 100$ В. Почему вольтметр показывает 20 В, а не 40 В, как можно было бы ожидать? Сравните силу тока в вольтметре с силой тока в резисторе, напряжение на котором он измеряет.

Решение Вольтметр показывает низкое напряжение, очевидно, потому, что его внутреннее сопротивление недостаточно велико, и в него ответвляется значительный ток. Найти силу $I_в$ этого тока можно следующим образом. Сила тока в резисторе R_2 равна, очевидно,

$$I = \frac{U - U_1}{R_2}, \tag{24}$$

так как напряжение на нем равно разности между приложенным напряжением сети U и напряжением U_1, показываемым вольтметром. Этот ток разветвляется на ток $I_1 = U_1/R_1$ в первом резисторе и ток через вольтметр $I_в$. Поэтому

$$I_в = I - I_1 = \frac{U - U_1}{R_2} - \frac{U_1}{R_1}. \tag{25}$$

Составляя отношение $I_в/I_1$, получаем

$$\frac{I_в}{I_1} = \frac{U - U_1}{U_1}\frac{R_1}{R_2} - 1 = \frac{5}{3}.$$

Ток, ответвляющийся в измерительный прибор, оказался больше тока в резисторе, напряжение на котором измеряется. Ясно, что такой вольтметр и такой делитель напряжения несовместимы!

3. В делителе напряжения из предыдущей задачи (см. рис. 72) сопротивления R_1 и R_2 равны соответственно 4 и 6 кОм, а вольтметр при сетевом напряжении $U = 100$ В показывает $U_1 = 36$ В. Что покажет этот вольтметр, если заменить сопротивления соответственно на $R_1' = 4$ Ом и $R_2' = 6$ Ом?

Решение В получившейся после замены резисторов цепи вольтметр включен параллельно сопротивлению R_1'. Последовательно с ними включено сопротивление R_2'. Поэтому, обозначив напряжение, показываемое вольтметром, через U_1', имеем

$$\frac{U - U_1}{U_1} = \frac{R_1' R_в/(R_1' + R_в)}{R_2'}, \tag{26}$$

где $R_в$ — внутреннее сопротивление вольтметра, Решая уравнение (31) относительно U_1', находим

$$U_1' = U\,\frac{R_1' R_в}{(R_1' + R_2')R_в + R_1' R_2'}. \tag{27}$$

Для расчета показываемого вольтметром напряжения U_1' по формуле (27) нужно знать его внутреннее сопротивление $R_в$. Его можно найти с помощью формулы (26), заменив в ней U_1' на U_1, а R_1' и R_2' — на R_1 и R_2 (т. е. применив ее к цепи, существовавшей до замены резисторов). Чтобы избежать громоздких алгебраических выкладок, можно вместо этого воспользоваться формулой (25) предыдущей задачи и найти $R_в$ как отношение $U_1/I_в$. Проделав соответствующие расчеты, получим $U_1' \approx 40$ В.

Полученное значение 40 В совпадает с тем, чего следовало ожидать от делителя напряжений. Это означает, что в данном случае внутреннее сопротивление вольтметра достаточно велико и ток в него практически не ответвляется. Сопротивление вольтметра $R_в$, очевидно, много больше R_1' и R_2'. Поэтому в знаменателе формулы (27) можно пренебречь слагаемым $R_1'R_2'$, после чего она принимает вид

$$U_1' = U\,\frac{R_1'}{R_1' + R_2'}. \qquad (28)$$

Формула (28) соответствует предположению об идеальности вольтметра. Таким образом, в цепи, содержащей килоомные резисторы, данный вольтметр с внутренним сопротивлением 9 кОм нельзя считать идеальным, а в цепи с резисторами в несколько омов — уже можно.

- Объясните каждый этап упрощения схемы на рис. 63. Каким образом получаются приведенные значения эквивалентных сопротивлений?
- Приведите подробное обоснование того, что токи в одинаковых резисторах схемы на рис. 65 одинаковы.
- Составьте уравнение, соответствующее проходу от входа к выходу в схеме на рис. 65 по пути, пролегающему через резисторы R_2, R_3 и R_2, и покажите, что оно является следствием уравнений (8).
- Рассмотрите каждый из частных и предельных случаев в схеме на рис. 65 независимо, и покажите, что общая формула (10) дает для них правильные результаты.
- Отклонение стрелки измерительного прибора у вольтметра, как и у амперметра, пропорционально силе тока, проходящего по его катушке. Почему же вольтметр показывает напряжение, а не силу тока? Почему амперметр нельзя использовать как вольтметр?
- Выведите формулы (13) и (14) для расчета неизвестного сопротивления по показаниям амперметра и вольтметра.
- Объясните, почему условия применимости представления об идеальных амперметре и вольтметре зависят не только от характеристик этих измерительных приборов, но и от цепи, в которой они используются.
- Какими факторами определяется точность измерения сопротивлений с помощью моста Уитстона?

§ 12. Закон Ома для неоднородной цепи

Расчет электрических цепей постоянного тока основан на использовании закона Ома. Для однородного участка цепи применения закона Ома были подробно рассмотрены в предыдущем параграфе. А как найти силу тока в *неоднородном* участке электрической цепи, на концах которой существует некоторая разность потенциалов и внутри которого имеются скачки потенциалов, например, включен гальванический элемент или аккумулятор?

Контактная разность потенциалов. Рассмотрим сначала неоднородный участок цепи, состоящий из двух последовательно соединенных различных проводников A и B, например, медного и цинкового (рис. 73). Опыт показывает, что между различными проводниками имеется скачок потенциала, который не зависит от тока и существует даже в его отсутствие. Эта *контактная разность потенциалов* была открыта еще в 1797 г. итальянским физиком А. Вольта, установившим ряд металлов, в котором каждый предыдущий металл при соединении с любым из последующих электризуется положительно: Al, Zn, Sn, Cd, Pb, Sb, Bi, Hg, Fe, Cu, Ag, Au, Pt, Pd.

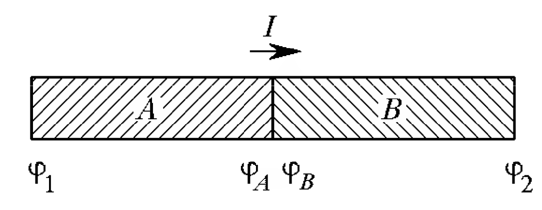
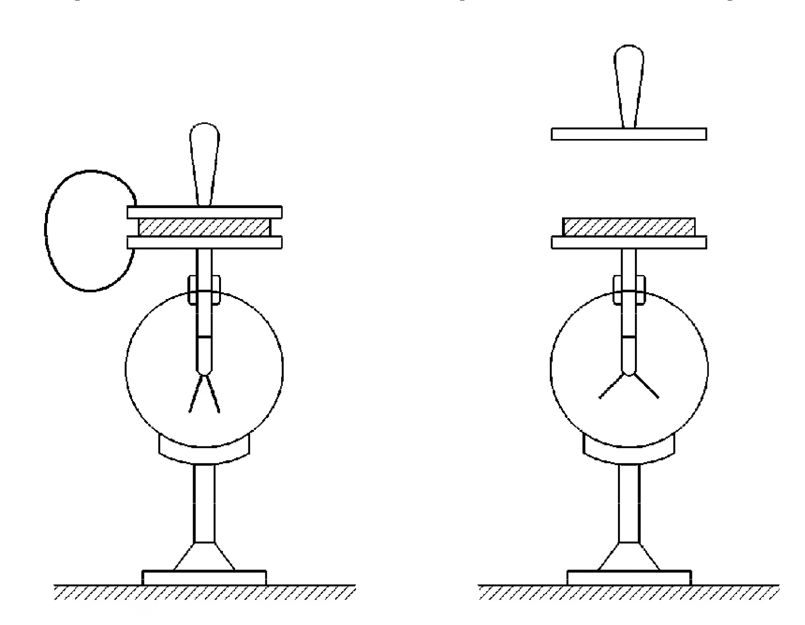


Рис. 73. Неоднородный участок цепи

Существование контактной разности потенциалов можно продемонстрировать с помощью следующего простого опыта. На стержне электроскопа укрепляют пластину из исследуемого металла


Рис. 74. Обнаружение контактной разности потенциалов

(рис. 74). Ее покрывают тонким слоем изолирующего материала. Сверху кладут пластину из второго исследуемого материала, снабженную изолирующей ручкой, и соединяют эту пластину с землей.

Пластины на некоторое время соединяют проводником. При этом между пластинами возникает контактная разность потенциалов, т. е. образованный ими конденсатор заряжается. Однако существующее в нем напряжение настолько мало, что обнаружить отклонение листочков электроскопа невозможно. Поэтому поступают следующим образом. Верхнюю пластину поднимают, так что емкость образованного пластинами конденсатора уменьшается. Так как заряд на изолированной нижней пластине остается неизменным, то разность потенциалов между ней и землей возрастает во столько раз, во сколько уменьшается емкость. При достаточном раздвижении пластин отклонение листочков электроскопа легко обнаруживается.

Физическая причина возникновения контактной разности потенциалов заключается в различии работы выхода у разных металлов, т. е. минимальной работы, которую нужно совершить, чтобы удалить электрон из металла в вакуум, а также в различии концентрации свободных электронов в них. Величина скачка потенциала зависит от рода металлов, чистоты их поверхностей и от их температуры. Контактная разность потенциалов колеблется от нескольких десятых вольта до единиц вольт.

Если соединить между собой последовательно несколько различных металлов, то возникающая на концах крайних проводников разность потенциалов не зависит от того, какие проводники находятся между ними, т. е. будет такой же, как при непосредственном соединении этих крайних проводников между собой. Подчеркнем, что в отсутствие тока каждый металл остается эквипотенциальным, а скачок потенциала и связанное с ним электрическое поле имеются только в месте контакта.

Ток в неоднородном участке цепи. Подсоединим теперь внешние концы проводников A и B на рис. 73 к источнику постоянного напряжения. Обозначим потенциал левого конца проводника A через φ_1, а потенциал правого конца проводника B через φ_2. Потенциалы металлов A и B в месте контакта обозначим через φ_A и φ_B. Так как теперь в проводниках идет ток, то, разумеется, $\varphi_1 \neq \varphi_A$ и $\varphi_2 \neq \varphi_B$. Мы пока не знаем, как записать закон Ома для всего рассматриваемого участка цепи, но зато можем записать его для каждого из однородных участков A и B. Так как проводники соединены последовательно, то через них протекает один и тот же ток I. Предположим, что ток идет слева направо, как показано на рис. 73. Тогда

$$\varphi_1 - \varphi_A = IR_A, \qquad \varphi_B - \varphi_2 = IR_B, \tag{1}$$

где R_A и R_B — сопротивления участков A и B. Сложим почленно уравнения (1) и перегруппируем слагаемые в левой части следующим образом:

$$(\varphi_1 - \varphi_2) + (\varphi_B - \varphi_A) = I(R_A + R_B). \tag{2}$$

Сумма $R_A + R_B$ есть полное сопротивление R рассматриваемого участка. Разность потенциалов $\varphi_1 - \varphi_2$ представляет собой приложенное напряжение U. Разность $\varphi_B - \varphi_A$ есть скачок потенциала в месте контакта металлов, который, как уже отмечалось, не зависит от протекающего тока и определяется только природой металлов и температурой. Значение скачка $\varphi_B - \varphi_A$ обозначим через $\mathscr{E}$. Тогда соотношение (2) можно переписать в виде

$$I = \frac{U + \mathscr{E}}{R}. \tag{3}$$

Это и есть закон Ома для неоднородного участка цепи.

Отметим, что под напряжением U на рассматриваемом участке понимается разность $\varphi_1 - \varphi_2$, где φ_1 — потенциал той точки, от которой течет ток, а φ_2 — потенциал точки, к которой течет ток. Скачок потенциала в месте контакта $\mathscr{E}$ определен как $\varphi_B - \varphi_A$, т. е. знак $\mathscr{E}$ определяется тем, повышает или понижает скачок значение потенциала в цепи в направлении протекания тока: если повышает, то $\mathscr{E} > 0$, если понижает, то $\mathscr{E} < 0$.

Но ведь при рассуждениях мы выбрали направление тока слева направо наугад! А если на самом деле он течет в противоположную сторону? Предположив, что ток течет справа налево, и повторяя буквально все выкладки, мы получим значение силы тока, отличающееся только знаком. Это означает, что, приступая к анализу неоднородного участка цепи, мы можем вообще не задумываться о том, в какую сторону течет ток на самом деле, а задавать ему направление произвольно.

Выбрав направление тока, мы определяем его значение по формуле (3), строго соблюдая сформулированное выше правило знаков для U и $\mathscr{E}$. Если в результате ток окажется положительным, то он действительно течет в заданном нами направлении. Если же получится отрицательное значение, то в действительности ток течет в противоположную сторону, а значение его, разумеется, найдено правильно. Ниже мы подробно рассмотрим примеры использования закона Ома для неоднородного участка цепи, иллюстрирующие сформулированное правило знаков.

Если соединить последовательно несколько различных проводников, то, повторяя все приведенные выкладки, легко убедиться, что формула (3) сохраняет свой вид; только теперь под $\mathscr{E}$ нужно понимать алгебраическую сумму скачков потенциала в контактах, а под R — сумму сопротивлений всех проводников.

Замкнутая неоднородная цепь. Рассмотрим теперь замкнутую цепь проводников, составленную из разных металлов. Представим себе, что эта замкнутая цепь получается в результате соединения начала и конца цепочки проводников, т. е. тех точек, к которым

могло быть приложено внешнее напряжение U. Соединение этих точек в одну означает, что теперь $U = 0$ и формула (3) для замкнутой последовательной цепочки принимает вид

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R}, \tag{4}$$

где $\mathscr{E}$ — алгебраическая сумма скачков потенциала между всеми парами соединенных проводников, а R — полное сопротивление замкнутой цепи.

Если контакты между различными металлами находятся при одинаковой температуре, то сумма всех скачков потенциалов $\mathscr{E}$ будет, очевидно, равна нулю, поскольку скачок потенциала между любыми двумя металлами не зависит от того, что находится между ними.

Электродвижущая сила. При различных температурах контактов в цепи сумма скачков потенциала $\mathscr{E}$ может быть отличной от нуля, и в цепи пойдет ток, определяемый формулой (4). Сумма $\mathscr{E}$ скачков потенциала в замкнутой цепи называется *электродвижущей силой* (ЭДС), а равенство (4) — законом Ома для замкнутой неразветвленной цепи.

Остановимся подробнее на физическом смысле понятия ЭДС. Скачок потенциала в месте контакта двух металлов возникает вследствие различия работы выхода электронов и их концентрации в этих металлах, приводящего к диффузии электронов через контакт. Силы, вызывающие направленный поток электронов, имеют неэлектростатическое (не кулоновское) происхождение. Такие силы неэлектростатического происхождения независимо от их физической природы называют *сторонними*. Направленный поток электронов через контакт прекращается, когда возникает препятствующее ему электростатическое поле, уравновешивающее действие сторонних сил. Это возникающее электростатическое поле и характеризуется контактной разностью потенциалов.

В рассмотренном случае электродвижущая сила возникает только при различных температурах контактов и называется *термоэлектродвижущей силой* (термоЭДС).

Закон Ома (4) для замкнутой цепи справедлив не только для термоЭДС, но и для сторонних сил любой природы. Как уже отмечалось, неоднородность цепи может быть обусловлена включением в нее гальванического элемента, аккумулятора, генератора постоянного тока и т. д. Если рассматриваемая цепь содержит несколько ЭДС, то в формуле (4) под $\mathscr{E}$ нужно понимать алгебраическую сумму всех этих ЭДС, причем знак каждой из них определяется в соответствии со сформулированным выше правилом.

Ниже будет показано, что ЭДС $\mathscr{E}$ характеризует работу сторонних сил, совершаемую при перемещении зарядов. Другими словами, ЭДС характеризует превращение энергии других видов в электрическую.

ЭДС в разных источниках. В противоположность контактам проводников первого рода (металлы, полупроводники), в которых не происходит никаких химических изменений при прохождении электрического тока, в контактах металлов с электролитами (например, цинка с серной кислотой) происходят химические реакции. Как мы видели, в замкнутой цепи из различных проводников первого рода при одинаковой их температуре не возникает ЭДС. Если же составить замкнутую цепь из проводников первого и второго рода, то в ней возникает отличная от нуля ЭДС даже при постоянной температуре.

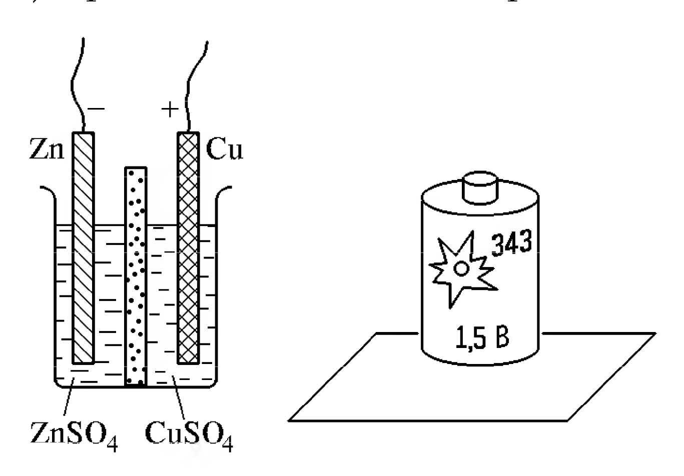


Рис. 75. Элемент Даниеля и внешний вид сухого элемента Лекланше

Такого рода комбинация проводников первого рода и электролитов представляет собой химический источник тока «сухой» *гальванический элемент*, или *аккумулятор* (рис. 75), в котором электрический ток поддерживается за счет химических реакций между электродами и электролитом. Например, в гальваническом элементе, состоящем из пластин цинка и меди, погруженных в раствор серной кислоты, происходит растворение цинкового электрода в кислоте. В аккумуляторах используются обратимые химические реакции: расходуемый при работе электрод восстанавливается в процессе зарядки. Химические источники тока обеспечивают ЭДС до 2 В.

В генераторах, применяемых на электростанциях для превращения механической энергии в электрическую, сторонние силы по своей природе — это силы, действующие на движущиеся в магнитном поле заряды.

Внутреннее сопротивление источника тока. В любой реальной электрической цепи всегда можно выделить участок, который служит для поддержания тока (источник тока), а остальную часть рассматривать как «нагрузку». В источнике тока обязательно действуют сторонние силы, поэтому в общем случае он характеризуется электродвижущей силой $\mathscr{E}$ и сопротивлением r, которое называется внутренним сопротивлением источника. Нагрузка тоже может содержать ЭДС (например, электродвигатель), однако в простейшем случае в нагрузке никакие сторонние силы не действуют, и она характеризуется только сопротивлением.

Простейшая замкнутая цепь. Рассмотрим замкнутую электрическую цепь, содержащую источник тока с ЭДС $\mathscr{E}$ и внутренним сопротивлением r и нагрузку, характеризуемую только сопротивлени-

ем R (рис. 76). Сопротивление соединительных проводов будем считать равным нулю. Применяя к такой цепи формулу (4), в знаменателе которой стоит полное сопротивление цепи, запишем ее в виде

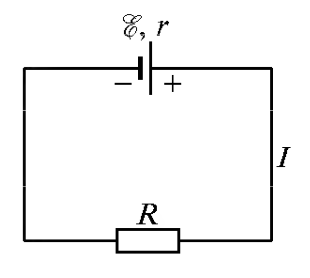


Рис. 76. Простейшая замкнутая цепь с источником тока

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R+r}, \tag{5}$$

где через R обозначено сопротивление нагрузки. Идеальный вольтметр, подключенный к сопротивлению R, т. е. к зажимам (полюсам) работающего источника тока, показывает напряжение $U = IR$, как это следует из закона Ома для однородного участка цепи — в данном случае для сопротивления нагрузки. Подставляя сюда силу тока I из (5), это напряжение можно выразить через параметры цепи $\mathscr{E}$, r и R:

$$U = \mathscr{E}\,\frac{R}{R+r}. \tag{6}$$

Из (6) видно, что напряжение U на зажимах работающего источника всегда меньше его ЭДС. Оно тем ближе к $\mathscr{E}$, чем больше сопротивление нагрузки R. В пределе $R \to \infty$ (точнее когда $r/R \ll 1$, т. е. когда можно пренебречь сопротивлением источника по сравнению с сопротивлением нагрузки) из (6) следует, что $U \to \mathscr{E}$: напряжение на зажимах разомкнутого источника равно его ЭДС.

Противоположный предельный случай $R = 0$ (точнее, когда $R/r \ll 1$, т. е. когда сопротивление нагрузки много меньше внутреннего) соответствует так называемому *короткому замыканию* источника тока. В этом случае $U = 0$, а

$$I_{max} = \frac{\mathscr{E}}{r} \tag{7}$$

— ток короткого замыкания, т. е. максимальный ток, который можно получить от данного источника.

Из формулы (5) следует, что напряжение на зажимах источника $U = IR$ можно записать в виде

$$U = \mathscr{E} - Ir. \tag{8}$$

Произведение Ir представляет собой напряжение на сопротивлении r, т. е. напряжение U' внутри источника тока. Поэтому формула (8) означает, что ЭДС равна сумме напряжений на внешнем (U) и внутреннем (U') участках замкнутой цепи.

Составная внешняя цепь. Как правило, внешняя цепь состоит из нескольких сопротивлений, по-разному соединенных между собой. Все сказанное выше остается справедливым, если под R понимать эквивалентное сопротивление всей внешней цепи. Приведенные соотношения позволяют легко рассчитывать такие цепи или проводить их качественный анализ.

Рассмотрим следующие примеры.

1. Требуется определить, как изменятся (увеличатся или уменьшатся) показания всех идеальных вольтметров в цепи, показанной на рис. 77, если, например, уменьшить сопротивление R_2 переменного резистора.

При уменьшении R_2 сила тока в цепи возрастает. В соответствии с законом Ома для участка цепи напряжение U_1 на сопротивлении R_1 возрастает, а напряжение U на зажимах источника тока, как

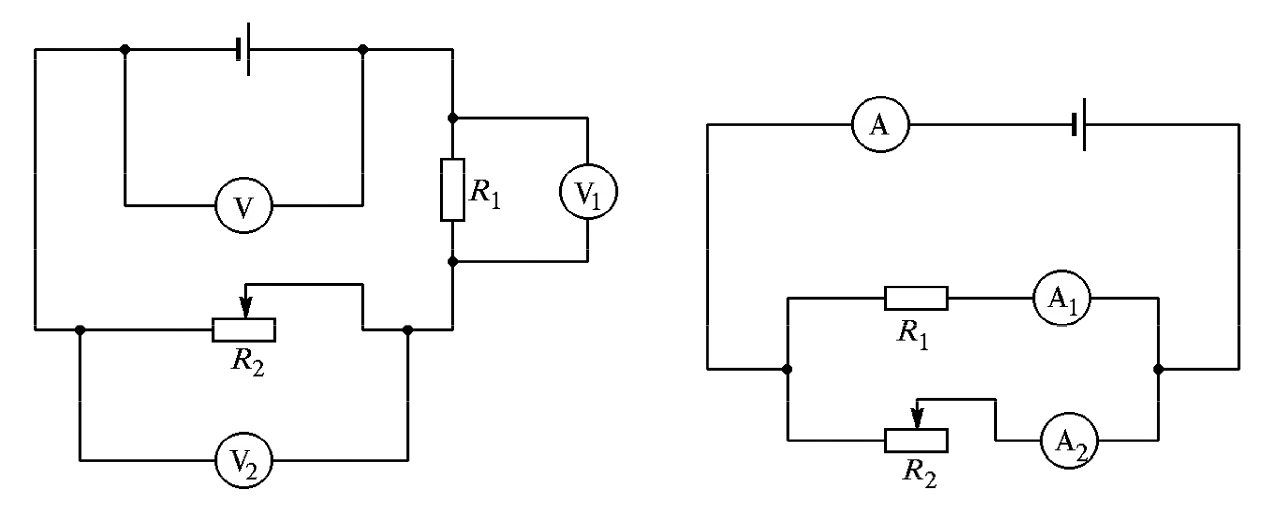


Рис. 77. К исследованию изменений показаний вольтметров

Рис. 78. К исследованию изменений показаний амперметров

следует из формулы (8), уменьшается. Применять закон Ома для участка цепи к сопротивлению R_2 затруднительно, поскольку R_2 убывает, а ток в цепи возрастает. Поэтому воспользуемся тем, что $U = U_1 + U_2$, откуда сразу ясно, что напряжение на резисторе R_2 убывает, причем в большей мере, чем U.

2. Требуется определить, как изменятся показания всех идеальных амперметров в схеме, показанной на рис. 78, при уменьшении сопротивления R_2. Очевидно, что при уменьшении R_2 полное сопротивление нагрузки уменьшается, и ток I, показываемый амперметром A, возрастает. При этом, как следует из (8), напряжение на параллельно соединенных сопротивлениях R_1 и R_2 убывает. Поэтому ток I_1, показываемый амперметром A_1, уменьшается. Сказать сразу, что произойдет с показанием амперметра A_2, затруднительно. Однако из равенства $I = I_1 + I_2$ немедленно следует, что I_2 увеличивается, причем в большей мере, чем I.

- Что такое контактная разность потенциалов? Как на опыте можно убедиться в ее существовании?
- Покажите, как с помощью закона Ома для однородного участка цепи можно получить формулу (3).

- Поясните правило знаков, которым следует руководствоваться при использовании формулы (3).
- Что такос элсктродвижущая сила? Пояснитс физичсский смысл понятия ЭДС на примере цепи из разных металлов. Что такое сторонние силы?
- Сформулируйте закон Ома для замкнутой неразветвленной цепи.
- Какими причинами объясняется ЭДС в цепи из разных металлов или полупроводников, в химических источниках тока, в электрических генераторах?
- Выделите основные части любой реальной замкнутой цепи. Какими параметрами они характеризуются?
- Как связано напряжение на включенном источнике с его ЭДС? От чего зависит напряжение внутри источника?

△ **Напряжение на источнике тока.** Вернемся к формуле (8). Она была получена как следствие закона Ома для замкнутой цепи, выражаемого формулой (5). Рассчитаем еще раз ток через

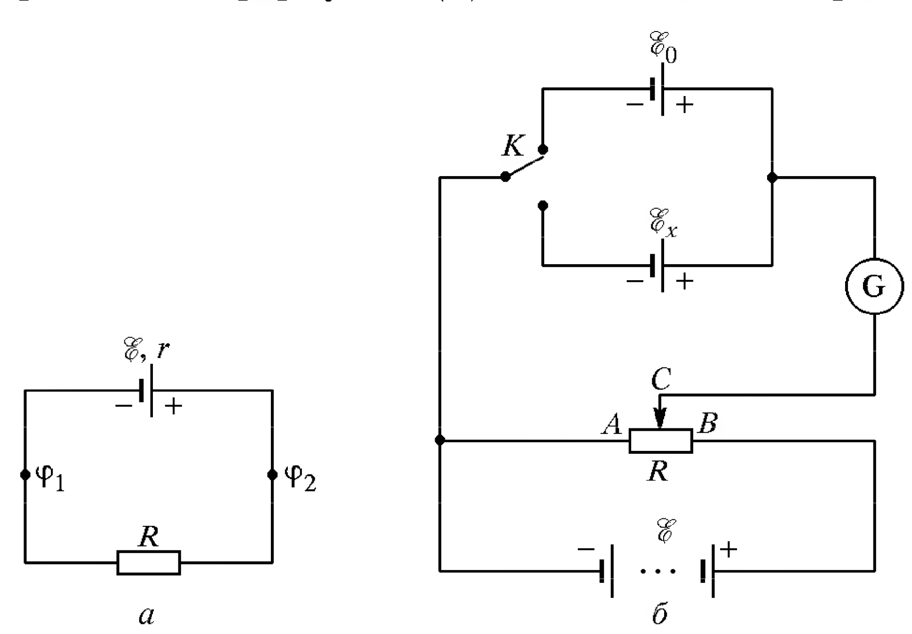


Рис. 79. Источник тока как неоднородный участок цепи (*а*) и компенсационный метод измерения ЭДС (*б*)

источник, рассматривая его как неоднородный участок цепи (рис. 79*а*). Используя формулу (3), в соответствии с приведенным выше правилом знаков имеем

$$I = \frac{\varphi_1 - \varphi_2 + \mathscr{E}}{r}. \qquad (9)$$

Нетрудно видеть, что напряжение U, фигурирующее в формуле (8), равно $\varphi_2 - \varphi_1$. Поэтому соотношение (9) фактически совпадает с (8). Однако при таком выводе этой формулы не использовалось предположение, что ток создается только этим источником (т. е. что $U = \mathscr{E}$). Поэтому формула (8), как и (9),

фактически справедлива при любом соотношении между потенциалами φ_2 и φ_1, характеризующими напряжение на источнике тока.

Измерение ЭДС. Определение ЭДС какого-либо источника на опыте обычно производится так называемым компенсационным методом, когда неизвестная ЭДС сравнивается с хорошо известной ЭДС другого, эталонного источника. Для этого используется схема, показанная на рис. 79*б*. Батарея, ЭДС которой $\mathscr{E}$ заведомо больше как ЭДС эталонного источника $\mathscr{E}_0$, так и измеряемой ЭДС $\mathscr{E}_x$, замыкается на внешнее сопротивление AB. С помощью переключателя K к некоторой части R этого сопротивления можно подключить либо эталонный источник, либо измеряемый. Полярность включения элементов показана на рис. 79*б*.

Подключим сначала эталонный источник с ЭДС $\mathscr{E}_0$ и подберем сопротивление R таким образом, чтобы ток через гальванометр, а следовательно, и через эталонный источник обратился в нуль. Запомним значение R_1 сопротивления R, при котором это произойдет. Затем повторим то же самое, подключая источник с неизвестной ЭДС $\mathscr{E}_x$ и подберем значение R_2 сопротивления R, при котором отсутствует ток через гальванометр.

Из формулы (9) следует, что ток через участок цепи, содержащий гальванометр и один из подключаемых элементов, отсутствует, когда напряжение между точками A и C пропорционально соответствующему значению сопротивления R, т. е. R_1 или R_2. Это значит, что для отношения $\mathscr{E}_x/\mathscr{E}_0$ справедливо

$$\mathscr{E}_x/\mathscr{E}_0 = R_2/R_1,$$

откуда $\mathscr{E}_x = \mathscr{E}_0 R_2/R_1$. Достоинством компенсационного метода является то, что для определения ЭДС $\mathscr{E}_x$ неизвестного источника не требуется знать ни его внутреннего сопротивления, ни характеристик вспомогательного источника, подключаемого к точкам A и B магазина сопротивлений. Важно и то, что факт отсутствия тока через гальванометр может быть установлен с большей точностью, чем измерение любого отличного от нуля значения силы тока. ▲

- Объясните, почему напряжение U, фигурирующее в формуле (8), действительно равно $\varphi_2 - \varphi_1$, а не $\varphi_1 - \varphi_2$.
- В чем заключаются достоинства компенсационного метода измерения ЭДС?

§ 13. Расчет цепей постоянного тока

Расчет электрических цепей заключается в определении сил токов во всех ветвях и напряжений на всех элементах. Когда цепь содержит один источник тока, ее расчет не представляет принципиальных трудностей, поскольку всю нагрузку, какой бы разветвленной она ни была, можно заменить одним эквивалентным сопротивлением.

Как пример такого рода расчетов рассмотрим следующую задачу.

Задача

В цепи, схема которой показана на рис. 80, подбором переменного сопротивления добиваются, чтобы показания амперметра были одинаковыми независимо от того, в каком положении, *A* или *B*, находится ключ *K*. Чему равно внутреннее сопротивление источника тока, если этого удалось добиться при значениях переменного сопротивления и сопротивления амперметра, равных соответственно R и R_a?

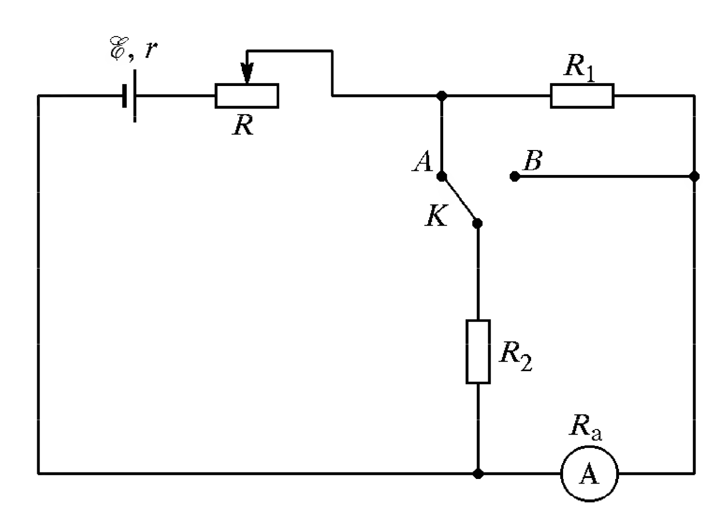


Рис. 80. Показания амперметра одинаковы при обоих положениях ключа

Решение Фактически в этой задаче речь идет о двух разных цепях, в которых показания прибора оказались одинаковыми. Прямой путь ее решения заключается в расчете для каждой схемы силы тока в соответствующем ответвлении, содержащем амперметр. При этом в каждом случае придется сначала найти эквивалентное сопротивление нагрузки, определить силу тока в неразветвленной части цепи, а затем найти силу тока через амперметр.

В данном случае, как и во многих других, можно обойтись без расчета эквивалентного сопротивления и найти ответы на поставленные в условии вопросы, используя несколько раз закон Ома для участка цепи и тот факт, что ЭДС равна сумме напряжений на всех участках любого контура, по которому можно обойти рассматриваемую замкнутую цепь.

Рассмотрим сначала схему, соответствующую ключу *K* в положении *A*. В этом случае R_1 и амперметр соединены последовательно, а параллельно их общему сопротивлению $R_1 + R_a$ включено R_2. Обозначив через I силу тока в амперметре (одинаковую в обоих случаях), а через I' — в сопротивлении R_2, имеем

$$\frac{I}{I'} = \frac{R_2}{R_a + R_1}.$$

Сила тока в неразветвленной части цепи равна сумме I и I'. Учитывая это, можно при обходе всей замкнутой цепи по контуру, содержащему амперметр, написать

$$\mathscr{E} = I(R_a + R_1) + I\left(1 + \frac{R_a + R_1}{R_2}\right)(R + r).$$

Аналогично, рассматривая схему, соответствующую ключу K в положении B, придем к равенствам

$$\frac{I}{I''} = \frac{R_2}{R_а},$$

где I'' — сила тока в сопротивлении R_2 при таком положении ключа, и

$$\mathscr{E} = IR_а + I\left(1 + \frac{R_а}{R_2}\right)(R + r + R_1).$$

Приравнивая получившиеся выражения для ЭДС источника, после приведения подобных членов при $R_1 \neq 0$ получаем

$$r + R = R_а$$

— сопротивление источника вместе с включенным последовательно с ним сопротивлением R должно быть равно сопротивлению амперметра $R_а$, чтобы его показания в обоих случаях были одинаковы. Интересно отметить, что это условие не зависит от значений сопротивлений R_1 и R_2. Однако ясно, что ни R_1, ни R_2 при этом не должны быть равны нулю: при $R_1 = 0$ обе схемы не различаются, а при $R_2 = 0$ показания амперметра равны нулю при любых значениях всех остальных параметров.

Рассмотрим цепи, содержащие несколько источников тока. На практике особенно важны случаи, когда одинаковые источники соединяются в батареи.

Последовательное соединение источников тока. При последовательном соединении нескольких источников (рис. 81) правила действий нам фактически уже известны. В соответствии с формулой (4) § 12 сила тока определяется отношением суммы ЭДС всех соединенных источников тока к сумме сопротивлений всех последовательных элементов цепи, включая нагрузку:

$$I = \frac{\mathscr{E}_1 + \mathscr{E}_2 + \ldots + \mathscr{E}_n}{r_1 + r_2 + \ldots + r_n + R}. \qquad (1)$$

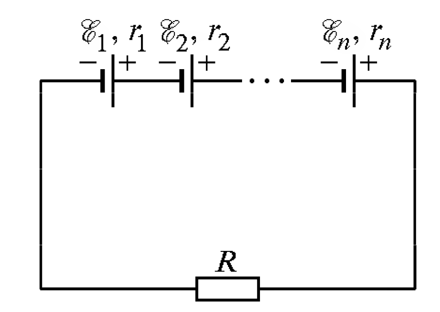


Рис. 81. Последовательное соединение источников тока

Когда все n источников одинаковы, формула (1) принимает вид

$$I = \frac{n\mathscr{E}}{nr + R}. \qquad (2)$$

Такая батарея источников тока эквивалентна одному источнику, как ЭДС, так и внутреннее сопротивление которого в n раз больше, чем у одного элемента батареи. Последовательное соединение элементов позволяет получить источник с высоким напряжением. Однако при этом возрастает внутреннее сопротивление. Чтобы такое соединение привело к увеличению тока в нагрузке по сравнению с источником из одного элемента, необходимо выполнение условия $nr \ll R$. При этом из (2) следует, что $I \approx n\mathscr{E}/R$ — ток от батареи возрастает примерно в n раз.

Параллельное соединение источников тока. Перейдем к параллельному соединению одинаковых элементов в батарею (рис. 82). Ток I через нагрузку, т. е. в неразветвленной части цепи, равен сумме токов во всех элементах батареи. Так как все элементы одинаковы, то из симметрии ясно, что и токи в них одинаковы и равны I/n. Вся батарея может быть заменена одним эквивалентным источником тока с ЭДС $\mathscr{E}$, такой же, как и у одного элемента, и внутренним сопротивлением r/n. Поэтому выражение для тока I в нагрузке имеет вид

$$I = \frac{\mathscr{E}}{r/n + R}. \tag{3}$$

Несмотря на то, что параллельное соединение источников не приводит к увеличению ЭДС, его целесообразно применять в тех случаях, когда требуется получить источник тока с малым внутренним сопротивлением. Такое соединение элементов приведет к увеличению тока в нагрузке почти в n раз, если $R \ll r$.

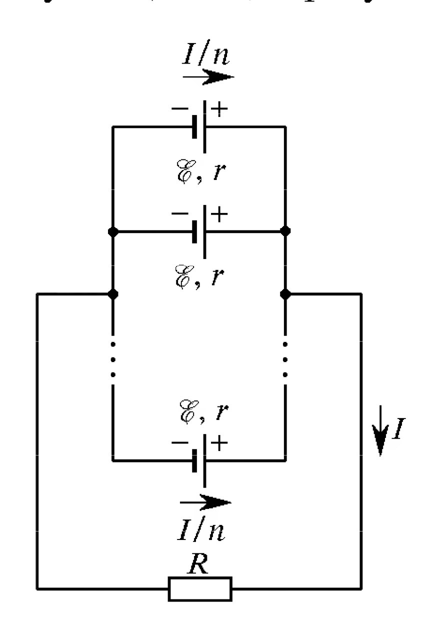


Рис. 82. Параллельное соединение источников тока

Отметим, что при $R = r$ оба способа соединения источников дают одинаковый результат для тока в нагрузке, приводя к его увеличению в $2n/(n+1)$ раз.

Возможно и комбинированное (смешанное) соединение элементов в батарею, при котором включаются параллельно m групп, в каждой из которых имеется n последовательно соединенных элементов. Такая батарея эквивалентна одному источнику, ЭДС которого в n раз больше, чем у одного элемента, а внутреннее сопротивление равно $(n/m)r$.

Параллельное и смешанное соединения разных источников тока используются очень редко. Такие цепи могут быть рассчитаны с помощью правил Кирхгофа, которые пригодны для расчета любых сложных разветвленных цепей.

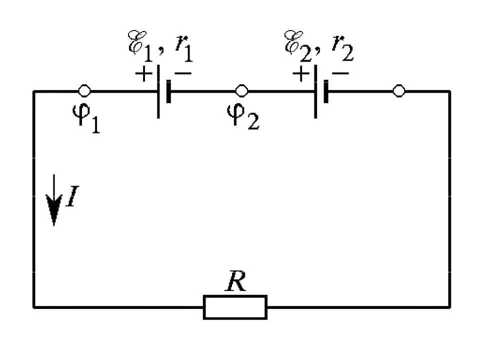


Рис. 83. Условия работы источников тока при последовательном соединении

Всегда ли нужен второй источник? Остановимся на анализе условий работы последовательно соединенных разных источников тока. Для этого рассмотрим цепь, схема которой показана на рис. 83. Выясним, всегда ли наличие второго источника с ЭДС $\mathscr{E}_2$ приводит к увеличению тока в цепи, первоначально содержащей только один источник с ЭДС $\mathscr{E}_1$. Очевидно, что второй источник имеет смысл под-

ключать, только если

$$\frac{\mathscr{E}_1+\mathscr{E}_2}{r_1+r_2+R} > \frac{\mathscr{E}_1}{r_1+R}. \tag{4}$$

Умножая обе части этого неравенства на положительную величину $(r_1 + r_2 + R)$ $(r_1 + R)$ и приводя подобные члены, получаем

$$\mathscr{E}_2(r_1 + R) > \mathscr{E}_1 r_2,$$

откуда

$$\frac{\mathscr{E}_2}{r_2} > \frac{\mathscr{E}_1}{r_1+R}. \tag{5}$$

Смысл неравенства (5) очевиден: в соответствии с формулой (7) § 12 слева стоит ток короткого замыкания второго источника, а справа — ток в цепи, содержащей только первый источник. Поэтому последовательное подсоединение второго источника целесообразно только в том случае, когда ток его короткого замыкания больше тока в цепи, в которую мы собираемся его включить. Практически в уже собранной цепи обнаружить «бесполезный» источник можно с помощью вольтметра, поочередно подключая его к клеммам каждого из источников.

- Как найти силу тока в любом ответвлении цепи, содержащей только один источник тока?
- В каких случаях целесообразно последовательное соединение одинаковых источников тока в батарею, а в каких — параллельное?
- При каком условии последовательное подключение еще одного источника тока не приведет к увеличению тока в той же нагрузке?
- Объясните, как с помощью вольтметра можно обнаружить «бесполезный» источник в уже собранной последовательной батарее элементов.

△ **Правила Кирхгофа.** Рассмотрим произвольную разветвленную цепь, часть которой изображена на рис. 83. Первое правило Кирхгофа относится к узлам, т. е. точкам, в которых сходится не менее трех проводников. Как уже отмечалось, вследствие закона сохранения заряда в любой точке цепи, в том числе и в любом узле, при прохождении постоянного тока не должно происходить накопления электрического заряда. Поэтому сумма притекающих к узлу токов должна равняться сумме вытекающих. Если условиться считать подходящие к узлу токи положительными, а исходящие из узла — отрицательными, то можно сказать, что алгебраическая сумма сил токов в узле равна нулю:

$$\sum_{k=1}^{n} I_k = 0, \tag{6}$$

где n обозначает число проводов, сходящихся в узле.

Второе правило Кирхгофа относится к произвольным замкнутым контурам, которые можно мысленно выделить в рассматриваемой разветвленной цепи. Рассмотрим контур *ABCA* на рис. 84. Поскольку при расчете мы будем использовать закон Ома для нео-

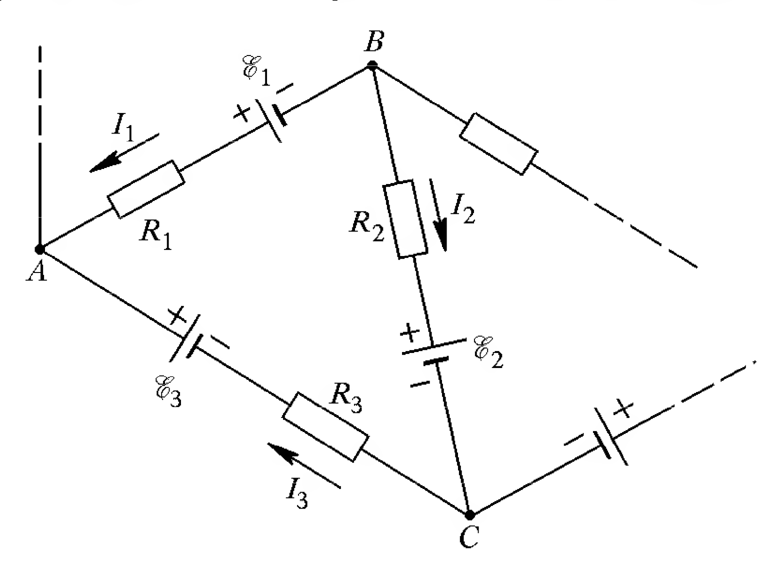


Рис. 84. Часть разветвленной электрической цепи

днородного участка цепи, то, как мы видели, направление токов в неразветвленных участках можно задать произвольно, например так, как на рис. 84. (Напомним, что если в результате расчета какой-либо из токов окажется отрицательным, то это означает, что в действительности ток на этом участке течет в противоположную сторону.) Запишем закон Ома для каждого из неразветвленных участков контура *ABCA*. Обозначив потенциалы узлов через φ_A, φ_B и φ_C, получим

$$
\begin{aligned}
I_1R_1 &= \varphi_B - \varphi_A + \mathscr{E}_1,\\
I_2R_2 &= \varphi_B - \varphi_C - \mathscr{E}_2, \qquad (7)\\
I_3R_3 &= \varphi_C - \varphi_A + \mathscr{E}_3.
\end{aligned}
$$

В этих формулах через R_k обозначено полное сопротивление участка, по которому течет ток I_k. Легко заметить, что если первое уравнение системы (7) умножить на -1 и затем сложить почленно все три уравнения, то потенциалы узлов выпадают:

$$
-I_1R_1 + I_2R_2 + I_3R_3 = -\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2 + \mathscr{E}_3. \qquad (8)
$$

Глядя на формулу (8), нетрудно сформулировать правило, с помощью которого можно было бы непосредственно получить это равенство: нужно выбрать определенное направление обхода замкнутого контура (например, по часовой стрелке) и приравнять алгебраическую сумму произведений сил токов на сопротивления соответствующих участков алгебраической сумме ЭДС, встречающихся в этом контуре. При этом ток считается положительным,

если его направление совпадает с направлением обхода контура, и отрицательным в противоположном случае; ЭДС берется со знаком « + », если она повышает потенциал в цепи в направлении обхода контура, и со знаком «—», если понижает. Это и есть второе правило Кирхгофа, которое можно коротко записать так:

$$\sum_{k=1}^{n} I_k R_k = \sum_{i=1}^{m} \mathscr{E}_i, \tag{9}$$

где n — число неразветвленных участков в рассматриваемом контуре (совпадающее с числом встречающихся в этом контуре узлов), а m — число источников ЭДС, действующих в контуре.

Правила расчета сложных цепей. Теперь можно сформулировать общие правила расчета произвольных разветвленных цепей постоянного тока.

1. Обозначить на схеме токи во всех неразветвленных участках, произвольно задавая им направление.

2. Согласно первому правилу Кирхгофа написать уравнения (6) для всех узлов, кроме одного (уравнение для последнего узла писать не нужно, так как оно является следствием предыдущих).

3. Согласно второму правилу Кирхгофа составить уравнения (9) для всех простых контуров, которые можно выделить в данной цепи и которые не получаются наложением уже рассмотренных. Простым считается такой контур, при обходе которого мы побываем в каждой точке только по одному разу. В правильно выбранной системе контуров каждый участок цепи должен фигурировать по крайней мере в одном из контуров.

4. Если в результате решения получившейся системы уравнений какие-либо токи окажутся отрицательными, то в действительности их направление противоположно выбранному на схеме.

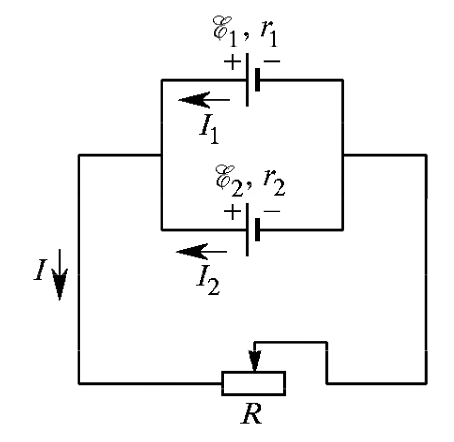


Рис. 85. К условиям работы источников тока при параллельном соединении

Пример расчета. Для иллюстрации применения правил Кирхгофа рассмотрим условия работы батареи из двух разных параллельно соединенных источников. Параметры схемы указаны на рис. 85.

Обозначим токи в неразветвленных участках цепи через I_1, I_2 и I и зададим им направления, как указано на рисунке. Пользуясь сформулированными правилами расчета цепей, составляем уравнение для токов в узле:

$$I_1 + I_2 - I = 0. \tag{10}$$

Выберем два простых контура, например следующим образом: один содержит источник с ЭДС $\mathscr{E}_1$ и сопротивление R, другой содержит оба источника тока. Обходя эти контуры против часовой стрелки, получаем следующие уравнения:

$$I_1 r_1 + IR = \mathscr{E}_1, \tag{11}$$

$$I_1 r_1 - I_2 r_2 = \mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2. \tag{12}$$

Мы получили систему из трех уравнений с тремя неизвестными токами I_1, I_2 и I. Выражаем I_2 из уравнения (10) и подставляем в (12):

$$I_1(r_1 + r_2) - Ir_2 = \mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2. \tag{13}$$

Умножая (11) на r_2, а (13) на R и складывая их почленно, находим I_1:

$$I_1 = \frac{\mathscr{E}_1(r_2 + R) - \mathscr{E}_2 R}{R(r_1 + r_2) + r_1 r_2}. \tag{14}$$

Аналогично исключая из уравнений (11) и (13) I_1, находим I:

$$I = \frac{\mathscr{E}_1 r_2 + \mathscr{E}_2 r_1}{R(r_1 + r_2) + r_1 r_2}. \tag{15}$$

Выражение для I_2, которое просто находится из уравнения (10), учитывая симметрию схемы, можно написать и непосредственно, заменяя в (14) индексы, $1 \leftarrow\rightarrow 2$:

$$I_2 = \frac{\mathscr{E}_2(r_1 + R) - \mathscr{E}_1 R}{R(r_1 + r_2) + r_1 r_2}. \tag{16}$$

Выражение (15) показывает, что ток I через нагрузку R всегда положителен и, следовательно, течет в направлении, указанном на схеме. Из (14) и (16) видно, что при равных $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$ токи через источники I_1 и I_2 тоже положительны. Если же, например, $\mathscr{E}_1 > \mathscr{E}_2$, то I_1 всегда положителен, в то время как ток I_2 может быть и отрицательным. В таком случае он течет в направлении, противоположном указанному на рис. 84. Это означает, что источник $\mathscr{E}_2$ не отдает энергию во внешнюю цепь, а сам потребляет энергию от источника $\mathscr{E}_1$.

Выясним, при каких условиях источник $\mathscr{E}_2$ (при $\mathscr{E}_1 > \mathscr{E}_2$) будет работать нормально, т. е. отдавать энергию во внешнюю цепь. Из (16) видно, что $I_2 > 0$ при $\mathscr{E}_2(r_1 + R) - \mathscr{E}_1 R > 0$. Переписав это условие как

$$\mathscr{E}_2 > \frac{\mathscr{E}_1 R}{r_1 + R}, \tag{17}$$

видим, что второй источник работает нормально, если его ЭДС больше напряжения U на зажимах первого источника в схеме, где только первый источник замкнут на сопротивление R.

Полученный результат легко понять из следующих простых соображений. Пусть к сопротивлению R подключен только первый источник. Если напряжение на его зажимах $U = \mathscr{E}_1 R/(r_1 + R)$ больше $\mathscr{E}_2$, то, подключая $\mathscr{E}_2$ параллельно $\mathscr{E}_1$, мы фактически ставим второй источник на «зарядку», подобно аккумулятору.

Из формулы (17) видно, что условие нормальной работы второго источника зависит от сопротивления нагрузки R: при малом R он работает нормально, при некотором значении R, определяемом условием $\mathscr{E}_2 = \mathscr{E}_1 R/(r_1 + R)$, ток через $\mathscr{E}_2$ обращается в нуль, т. е. при $R = \mathscr{E}_2 r_1/(\mathscr{E}_1 - \mathscr{E}_2)$ подключение этого источника ничего не меняет в остальной цепи. При больших значениях R подключение источника $\mathscr{E}_2$ приводит к уменьшению тока через нагрузку R.

Два параллельно соединенных источника тока можно заменить одним эквивалентным источником, который обеспечит во внешней цепи такой же ток. Параметры такого источника легко определить с помощью формулы (15). Переписывая ее в виде

$$I = \frac{(\mathscr{E}_1 r_2 + \mathscr{E}_2 r_1)/(r_1 + r_2)}{R + r_1 r_2/(r_1 + r_2)}$$

и сравнивая с выражением для тока, создаваемого эквивалентным источником ЭДС $\mathscr{E}$ и внутренним сопротивлением r, $I = \mathscr{E}/(R + r)$, находим, что значения $\mathscr{E}$ и r эквивалентного источника определяются формулами

$$\mathscr{E} = \frac{\mathscr{E}_1 r_2 + \mathscr{E}_2 r_1}{r_1 + r_2}, \quad r = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}. \tag{18}$$

В частности, для одинаковых параллельно соединенных источников эквивалентный источник, как видно из (18), имеет ту же ЭДС и вдвое меньшее внутреннее сопротивление. Этот результат уже был получен раньше. В случае неравных ЭДС $\mathscr{E}_1$ и $\mathscr{E}_2$ величина $\mathscr{E}$ имеет промежуточное значение. ▲

- Разветвленная цепь содержит n узлов, и в ней можно выделить m простых контуров. Сколько независимых уравнений можно составить, используя первое правило Кирхгофа? второе правило Кирхгофа?
- В чем сходство и различие условий (5) и (17), выполнение которых обеспечивает увеличение тока в нагрузке при подключении еще одного источника тока? Какова физическая причина этих различий?
- Какой смысл имеет отрицательное значение какого-либо из токов, получающееся при решении системы уравнений, составленных на основе правил Кирхгофа?

§ 14. Работа и мощность постоянного тока

При прохождении тока, т. е. при упорядоченном движении носителей заряда в проводнике, действующее на них электрическое поле, определяемое приложенным к концам проводника напряжением, совершает работу. Эту работу обычно называют работой электрического тока.

Работа сил электрического поля при перемещении носителей заряда равна произведению переносимого заряда q на разность потенциалов U между теми точками, где перемещается заряд:

$$A = qU. \tag{1}$$

При постоянном токе $q = It$, где t — время, в течение которого переносится заряд q. Поэтому работа постоянного тока I за время t на участке цепи, на концах которого поддерживается напряжение U, определяется соотношением

$$A = IUt. \tag{2}$$

Мощность P электрического тока, определяемая работой, совершаемой за единицу времени, равна

$$P = IU. \tag{3}$$

Электрический ток, совершая работу, может раскалять нить электролампы, вращать якорь электродвигателя, плавить металлы, вызывать химические превращения, заряжать аккумулятор и т. д. Во всех этих случаях работа тока определяет меру превращения электрической энергии в другие формы — внутреннюю энергию теплового движения, механическую энергию и т. д.

Работа электрического тока измеряется в тех же единицах, что и механическая работа. Это 1 эрг в системе СГСЭ и 1 Дж в СИ:

$$1\ \text{Дж} = 1\ \text{А} \cdot 1\ \text{В} \cdot 1\ \text{с}.$$

Мощность измеряется в ваттах: 1 Вт = 1 Дж/с = 1 А·1 В. Часто используются кратные единицы 1 кВт (киловатт) = 10^3 Вт и 1 МВт (мегаватт) = 10^6 Вт. Для работы тока часто используется внесистемная единица 1 кВт·ч (киловатт-час) — работа, совершаемая за 1 час при развиваемой мощности 1 кВт: 1 кВт·ч = 3,6 МДж.

Закон Джоуля–Ленца. Прохождение электрического тока через проводник, обладающий сопротивлением, всегда сопровождается выделением теплоты. Количество выделившейся за время t теплоты определяется законом Джоуля–Ленца:

$$Q = I^2Rt. \tag{4}$$

В случае однородного участка, когда $I = U/R$, формулы (2) и (4) совпадают, т. е. количество выделяющейся теплоты равно работе тока, и работу тока можно выразить любым из эквивалентных способов:

$$A = IUt = I^2Rt = \frac{U^2}{R}\,t. \tag{5}$$

В однородном участке цепи, например в резисторе, работа тока сводится только к выделению теплоты.

В качестве примера рассмотрим какой-нибудь электронагревательный прибор, отдающий выделяющуюся теплоту в окружающую среду. Скорость теплопередачи, т. е. количества теплоты, отдаваемой нагретым элементом в единицу времени, пропорциональна разности температур $\Delta T = T - T_0$ между нагретым телом и окружающей средой:

$$P_Q = k\,\Delta T.$$

Коэффициент k зависит от свойств тела (площади поверхности, размеров и формы). Будем считать его значение известным. Выделяющуюся джоулеву теплоту можно подсчитать по любой из формул (5). Поскольку обычно нагревательный прибор включается в сеть с заданным напряжением, то удобно воспользоваться выражением

$$P = U^2/R.$$

Сразу после включения выделяющаяся джоулева теплота превосходит отдаваемую окружающей среде, так как происходит нагревание самого прибора. В конце концов устанавливается такая его температура T, при которой P и P_Q сравниваются наступает стационарное состояние, в котором разность температур ΔT прибора и окружающей среды уже не меняется.

Если сопротивление нагреваемого током элемента не зависит от температуры, то, приравнивая значения P и P_Q, немедленно получаем выражение для установившейся разности температур:

$$\Delta T = U^2/kR.$$

Однако в действительности, как правило, сопротивление зависит от температуры. Для металлической проволоки эту зависимость можно считать линейной (см. § 10):

$$R(T) = R_0\,(1 + \alpha\Delta T),$$

где с хорошей точностью под R_0 можно понимать сопротивление при температуре T_0 окружающей среды. Если учитывать эту зависимость сопротивления от температуры, то, приравнивая P и P_Q, приходим уже к квадратному уравнению для ΔT:

$$\Delta T^2 + \frac{1}{\alpha}\,\Delta T - \frac{U^2}{R_0\alpha k} = 0.$$

Имеющий физический смысл корень этого уравнения можно представить в следующем виде:

$$\Delta T = \frac{1}{2\alpha}\left(\sqrt{1 + \frac{4\alpha U^2}{kR_0}} - 1\right).$$

В условиях, когда ΔT мало́, т. е. превышение температуры нагревательного элемента прибора над окружающей средой невелико, второй

член в подкоренном выражении мал по сравнению с единицей и можно воспользоваться приближенной формулой $\sqrt{1+x} \approx 1 + x/2$. При этом получаем прежний результат $\Delta T = U^2/kR_0$.

В другом предельном случае больших ΔT (как, например, у лампочки накаливания, температура нити которой составляет несколько тысяч градусов), можно, наоборот, в подкоренном выражении пренебречь единицей по сравнению со вторым членом. При этом для ΔT приближенно получаем

$$\Delta T = U/\sqrt{\alpha k R_0}$$

— разность температур теперь пропорциональна не квадрату, а первой степени приложенного напряжения.

В неоднородных участках цепи, где ток определяется формулой $I = (U + \mathscr{E})/R$, выделяющаяся теплота не равна работе тока. Это означает, что протекание тока в таком участке сопровождается не только выделением теплоты, но и другими процессами, связанными с превращением энергии.

Зарядка аккумулятора. В качестве примера энергетических превращений в неоднородной цепи рассмотрим зарядку аккумулятора. Не вдаваясь в детали происходящих в аккумуляторе процессов, а только учитывая, что при зарядке все химические процессы внутри него идут «вспять», легко сообразить, что ток идет в направлении, противоположном току при разрядке, когда аккумулятор является источником питания для внешней цепи. Поэтому аккумулятор включается в цепь так, как показано на рис. 86, а ток в цепи идет в направлении, указанном стрелкой. Так как ЭДС аккумулятора (сумма скачков потенциала внутри него) понижает потенциал в цепи в направлении протекания тока, то, в соответствии с законом Ома для неоднородного участка, ток в цепи равен

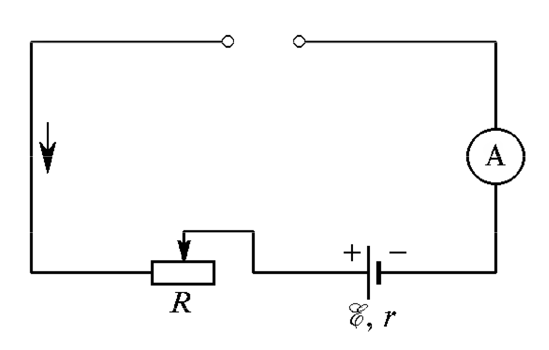


Рис. 86. Схема включения аккумулятора на зарядку

$$I = \frac{U - \mathscr{E}}{R + r}. \tag{6}$$

В этой формуле r — внутреннее сопротивление аккумулятора, а сопротивление R включено в цепь для регулировки зарядного тока. Легко видеть, что ток будет положительным и, следовательно, пойдет в указанном направлении только при условии, что подаваемое напряжение U больше электродвижущей силы аккумулятора $\mathscr{E}$. Только при выполнении этого условия и можно зарядить аккумулятор.

Работа, совершаемая зарядной станцией (т. е. внешним источником напряжения U) в единицу времени, т. е. работа тока на всем рассматриваемом участке, равна IU. На всех сопротивлениях,

включая внутреннее сопротивление аккумулятора, в единицу времени выделяется джоулева теплота, равная $I^2(R+r)$. Кроме зарядки аккумулятора и выделения теплоты других энергетических превращений в рассматриваемой цепи не происходит. Поэтому на основании закона сохранения энергии можно утверждать, что

$$IU = I^2(R+r) + P_{\text{зар}}, \tag{7}$$

где $P_{\text{зар}}$ — мощность, идущая непосредственно на зарядку аккумулятора. Подставляя в (7) выражение для силы тока (6), получаем

$$P_{\text{зар}} = \frac{\mathscr{E}(U-\mathscr{E})}{R+r} = \mathscr{E}I. \tag{8}$$

Таким образом, при зарядке аккумулятор в единицу времени запасает энергию, равную $I\mathscr{E}$. Разумеется, этого результата можно было ожидать из элементарных соображений: ведь процессы в аккумуляторе считаются обратимыми, а при разрядке аккумулятор развивает мощность $I\mathscr{E}$.

Обратим внимание, что, считая известными выражения для полной работы тока, для джоулевой теплоты и для работы зарядки аккумулятора, можно с помощью закона сохранения энергии получить выражение (6) для тока в цепи. Для этого нужно просто подставить в (7) $P_{\text{зар}} = I\mathscr{E}$. Это значит, что закон Ома для неоднородного участка можно получить как следствие закона сохранения энергии.

Работа источника тока. Источник тока — это устройство, поддерживающее разность потенциалов на концах подключенной к нему электрической цепи. Это происходит благодаря действию сторонних сил — сил неэлектростатической природы. Какие энергетические превращения при этом происходят?

Как мы видели, ЭДС $\mathscr{E}$ источника равна сумме напряжений во внешнем (U) и внутреннем (U') участках цепи:

$$U + U' = \mathscr{E}. \tag{9}$$

Домножим обе части этого равенства на заряд $q = It$, проходящий по цепи за время t. В левой части получившегося равенства будет стоять сумма работ электрического тока во внешнем и во внутреннем участках цепи. Справа будет стоять произведение $q\mathscr{E}$.

Электрический ток совершает работу за счет действия источника, т. е. сторонних сил. По закону сохранения энергии работа тока в цепи равна работе, совершаемой за это же время источником тока, т. е. работе действующих в нем сторонних сил.

Определение ЭДС. Итак, работа источника тока при перемещении по цепи заряда q равна $q\mathscr{E}$. Поэтому электродвижущей силе источника можно дать и такое определение: электродвижущей силой называется величина, равная отношению работы $A_{\text{стор}}$ сторонних сил

при перемещении по цепи заряда q к этому заряду:

$$\mathscr{E} = A_{\text{стор}}/q. \tag{10}$$

Поскольку работа источника тока равна $\mathscr{E}It$, то развиваемая им мощность

$$P = \mathscr{E}I. \tag{11}$$

Мощность и КПД источника тока. Выясним, каким должно быть сопротивление нагрузки R для того, чтобы получить максимальную силу тока в цепи, максимальную полезную мощность, максимальный коэффициент полезного действия.

Ток в цепи (рис. 87) определяется законом Ома: $I = \mathscr{E}/(R + r)$. Поэтому полная мощность P, развиваемая источником тока, равна $I\mathscr{E} = \mathscr{E}^2/(R + r)$. Полезная мощность $P_{\text{п}}$, т. е. мощность, выделяющаяся на нагрузке R, дается соотношением

$$P_{\text{п}} = IU = I^2R = \frac{\mathscr{E}^2 R}{(R+r)^2}. \tag{12}$$

Коэффициент полезного действия η источника в этой цепи, определяемый как отношение полезной мощности к полной, зависит от сопротивления нагрузки:

$$\eta = \frac{P_{\text{п}}}{P} = \frac{R}{R+r}. \tag{13}$$

Исследуем полученные выражения. Полная мощность P и ток в цепи I различаются постоянным множителем $\mathscr{E}$, поэтому их зависимость от сопротивления нагрузки R одинакова (кривая 1 на рис. 88). Макси-

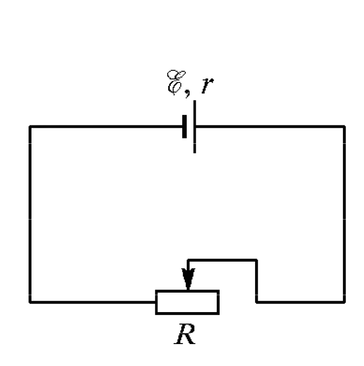


Рис. 87. К исследованию условий работы источника тока

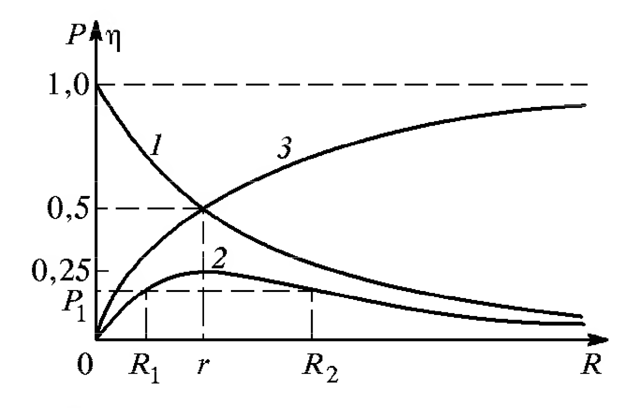


Рис. 88. Зависимость мощности и КПД источника тока от сопротивления нагрузки

мальным значение этих величин будет при $R = 0$, т. е. при коротком замыкании источника. Как видно из формул (12) и (13), при этом равны нулю полезная мощность $P_{\text{п}}$ и коэффициент полезного действия η.

При $R = r$ полная мощность и ток равны половине своего максимального значения, коэффициент полезного действия η равен 0,5, а полезная мощность достигает своего максимального значения, рав-

ного половине мощности P при этой нагрузке. Для того чтобы убедиться, что при равенстве сопротивления нагрузки и внутреннего сопротивления источника тока полезная мощность максимальна, преобразуем правую часть выражения (12) следующим образом:

$$P_\text{п} = \frac{\mathscr{E}^2}{(R+r)^2/R} = \frac{\mathscr{E}^2}{R+2r+r^2/R}. \tag{14}$$

Полезная мощность будет максимальной, когда знаменатель правой части выражения (14) минимален. Преобразуем знаменатель:

$$R - 2r + \frac{r^2}{R} + 4r = \left(\sqrt{R} - \frac{r}{\sqrt{R}}\right)^2 + 4r. \tag{15}$$

Функция (15) достигает минимума тогда, когда выражение в скобках равно нулю, т. е. при $R = r$. Этот результат можно, разумеется, получить, приравнивая нулю производную по R знаменателя правой части выражения (14).

При неограниченном увеличении сопротивления нагрузки ($R \to \infty$) как полная, так и полезная мощность стремится к нулю (кривая *2*), а коэффициент полезного действия — к единице (кривая *3*).

Из рис. 87 видно, что требования получения максимального тока в цепи, максимальной полезной мощности и максимального КПД противоречивы. Для получения возможно большего тока сопротивление нагрузки должно быть малым по сравнению с внутренним сопротивлением источника, но при этом близки к нулю полезная мощность и КПД: почти вся совершаемая источником тока работа идет на выделение теплоты на внутреннем сопротивлении r. Чтобы получить от данного источника тока максимальную полезную мощность, следует взять нагрузку с сопротивлением R, равным внутреннему сопротивлению источника. Значение максимальной полезной мощности $(P_\text{п})_{\max} = \mathscr{E}^2/(4r)$, но коэффициент полезного действия при этом равен всего лишь 0,5.

Любую полезную мощность P_1, меньшую максимальной, можно получить, как свидетельствует ход кривой *2* на рис. 88, при двух значениях R_1 и R_2 сопротивления нагрузки. Практически для получения заданной полезной мощности следует выбирать нагрузку с бóльшим сопротивлением R_2, так как КПД при этом выше. Для получения КПД, близкого к единице, следует брать нагрузку с сопротивлением, много большим внутреннего сопротивления источника тока, но при этом выделяющаяся мощность $P_\text{п} \to 0$.

- Работа каких сил имеется в виду, когда говорят о работе, совершаемой электрическим током?
- В каких случаях работа электрического тока $A = IUt$ не равна выделяющейся в цепи джоулевой теплоте $Q = I^2Rt$?

- Для зарядки аккумулятора с ЭДС $\mathscr{E}$ его включили в сеть с постоянным напряжением U $(U > \mathscr{E})$. Какая доля потребляемой от сети энергии запасается в аккумуляторе?
- Каким образом работа сторонних сил связана с ЭДС источника тока? Аргументируйте свой ответ.
- Какой должна быть нагрузка, чтобы источник тока развивал максимальную полезную мощность? Каким при этом будет его КПД?
- Почему условия получения максимальной полезной мощности и максимального КПД от данного источника тока противоречат друг другу?
- Покажите, что два значения сопротивления нагрузки R_1 и R_2, при которых в нагрузке выделяется одинаковая джоулева теплота, связаны соотношением $R_1R_2 = r^2$, где r — внутреннее сопротивление источника тока.
- Постройте графики зависимости мощности источника тока, полезной мощности и КПД от силы тока I в цепи.

△ **Поле сторонних сил.** Работа, совершаемая электрическим током при прохождении заряда по всей цепи, равна работе действующих в источнике сторонних сил. Поэтому ЭДС можно выразить через эти силы.

Введем новую величину $\mathbf{E}_{\text{стор}}$, которую назовем *напряженностью поля сторонних сил*. Это сила, действующая на единичный положительный заряд, обусловлена любыми причинами, кроме электростатического поля. Тогда полная сила, действующая на заряд, будет складываться из электростатической силы и сторонней силы:

$$F = q(\mathbf{E} + \mathbf{E}_{\text{стор}}). \qquad (16)$$

Рассмотрим замкнутую цепь и рассчитаем полную работу, совершаемую всеми действующими на заряд силами при его перемещении по всей цепи. Работа электростатических сил на замкнутом контуре равна нулю, так как эти силы — потенциальные. Поэтому полная работа на замкнутом контуре равна работе только сторонних сил. Именно эта работа и определяет ЭДС источника тока.

Обратим внимание на кажущееся противоречие. Работа тока — это по определению работа сил электрического поля. В то же время, как мы видели, работа тока во всей цепи равна работе источника, т. е. работе сторонних сил. Но как мы только что выяснили, работа электростатического поля равна нулю. Как все это согласовать?

Дело в том, что, говоря о работе электрического тока, мы имели в виду работу электрических сил не на всем замкнутом пути, а только на тех участках цепи, где заряды движутся под действием электрических сил. Мы не включали работу электрических сил в местах скачков потенциала (где и действуют сто-

ронние силы), т. е. в местах, где электрическое поле направлено противоположно движению положительных зарядов. Именно в этих местах внутри источника тока движение зарядов против сил электрического поля обусловлено действием сторонних сил. Если учесть работу электрических сил и в этих местах, то полная их работа действительно будет равна нулю.

Здесь можно привести следующую механическую аналогию. Лыжник спускается с горы и, сделав круг, возвращается к ее подножию, а затем с помощью подъемника снова поднимается на вершину. Аналогом потенциального электростатического поля здесь является поле силы тяжести. Роль сторонних сил играют силы, поднимающие его наверх в подъемнике. Очевидно, что полная работа силы тяжести на всем замкнутом пути равна нулю. Однако в данном случае она не представляет интереса. Важна лишь та работа сил тяжести, что совершается при движении лыжника от вершины горы до ее основания. Эта работа как раз и равна работе «сторонних» сил, действующих на лыжника в подъемнике.

Работа и теплота в произвольной цепи. В неоднородном участке цепи, содержащем источник с ЭДС $\mathscr{E}$ и внутренним сопротивлением r, когда $I = (U + \mathscr{E})/(R + r)$, для работы тока A, работы источника $A_{\text{ист}}$ и выделяющейся теплоты Q имеем

$$A = IUt = \frac{U+\mathscr{E}}{R+r}\, Ut,$$

$$A_{\text{ист}} = I\mathscr{E}t,$$

$$Q = I^2(R + r)t = I(U + \mathscr{E})t = \frac{(U+\mathscr{E})^2}{R+r}\, t.$$

Выделяющаяся теплота равна сумме работы тока и работы источника:

$$Q = A + A_{\text{ист}}.$$

Подчеркнем, что эти формулы справедливы во всех случаях, независимо от того, идет ли ток через источник в «естественном» направлении, когда он отдает энергию во внешнюю цепь, или в противоположном, как это бывает при зарядке аккумулятора, когда он потребляет энергию (в этом случае I и $\mathscr{E}$ имеют противоположные знаки и $A_{\text{ист}} < 0$). При этом теплота $Q = A + A_{\text{ист}}$ окажется во всех случаях положительной. ▲

- Как связаны между собой работа сторонних сил и работа сил электрического поля при переносе заряда вдоль всей замкнутой цепи?
- Поясните аналогию между работой электрических и сторонних сил и работой силы тяжести и «подъемной» силы при катании лыжника на горе с подъемником.

§ 15. Магнитное поле постоянного тока

Движущийся электрический заряд наряду с электрическим полем создает еще и магнитное поле. Магнитное поле проявляется в действии на магнитную стрелку, на рамку с током, на движущийся заряд. На рамку с током и на магнитную стрелку магнитное поле оказывает ориентирующее действие, на прямой проводник с током и на движущийся заряд в магнитном поле действует сила, перпендикулярная направлению движения зарядов.

Для наглядного изображения магнитных полей используют силовые линии. Эти линии непрерывны. В отличие от потенциального электрического поля, где силовые линии начинаются на положительных зарядах и оканчиваются на отрицательных, магнитное поле является *соленоидальным* или *вихревым*: его силовые линии всегда замкнуты. Другими словами, магнитное поле не имеет источников — магнитных зарядов.

Индукция магнитного поля. В отличие от электрического поля силовую характеристику магнитного поля по причинам исторического характера называют не напряженностью, а *индукцией*. Индукция **B** магнитного поля — это векторная физическая величина. Обычно ее вводят путем рассмотрения действия магнитного поля на маленькую пробную рамку с током.

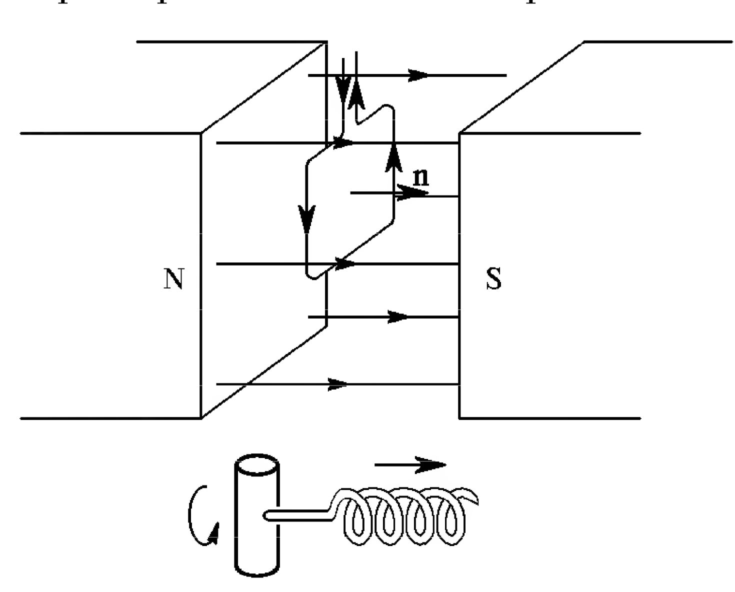


Рис. 89. Установившееся положение свободной рамки с током в магнитном поле

Как и в случае пробного заряда в электростатике, такая рамка должна удовлетворять определенным требованиям. Во-первых, рамка должна иметь достаточно малые размеры, чтобы по ее поведению можно было судить о магнитном поле в малой области (в «точке»). Во-вторых, ток в рамке должен быть достаточно мал, чтобы его влиянием на источники измеряемого магнитного поля можно было пренебречь.

По определению направление вектора **B** совпадает с направлением нормали к свободной пробной рамке с током, установившейся в магнитном поле (рис. 89). За направление нормали **n** к плоскости рамки принимают то направление, в котором будет перемещаться винт с правой нарезкой, если вращать его по направлению тока в рамке.

Если повернуть рамку на некоторый угол α относительно ее установившегося положения, то, как показывает опыт, на рамку будет

действовать момент сил, пропорциональный силе тока в рамке, ее площади S и синусу угла поворота:

$$M \sim IS \sin \alpha. \qquad (1)$$

Этот вращающий момент максимален, когда рамка ориентирована перпендикулярно магнитным линиям, т. е. когда $\sin \alpha = 1$: $M_{max} \sim IS$. Отношение максимального вращающего момента к произведению силы тока I на площадь поперечного сечения рамки S характеризует магнитное поле в том месте, где расположена рамка. Это отношение и принимают по определению за модуль B вектора магнитной индукции в системе единиц СИ:

$$B = \frac{M_{max}}{IS}. \qquad (2)$$

Единица магнитной индукции. За единицу магнитной индукции принята индукция такого поля, в котором на контур площадью 1 м^2 при силе тока 1А действует максимальный вращающий момент 1 Н·м. Такая единица называется тесла (Тл):

$$1\ \text{Тл} = \frac{1\ \text{Н}\cdot\text{м}}{1\ \text{А}\cdot 1\ \text{м}^2} = 1\ \frac{\text{Н}}{\text{А}\cdot\text{м}} = 1\ \frac{\text{кг}}{\text{А}\cdot\text{с}^2}.$$

Единица магнитной индукции в абсолютной системе единиц будет приведена ниже.

Магнитные силовые линии. Направление магнитных силовых линий в каждой точке совпадает с направлением вектора индукции. Как и в случае электрического поля, картину магнитных силовых линий можно сделать «видимой». Для этого используют мелкие железные опилки, которые в магнитном поле намагничиваются и, подобно маленьким магнитным стрелкам, ориентируются вдоль силовых линий. На рис. 90 приведены полученные таким способом картины магнитных полей кругового тока (*а*), длинной катушки-соленоида (*б*), прямого постоянного магнита (*в*).

Для расчета магнитных полей, создаваемых заданными токами, нужно учесть, что индукция магнитного поля, создаваемого текущим по проводу током, определяется совместным действием всех отдельных участков провода. Магнитное поле удовлетворяет принципу суперпозиции: если магнитное поле создается несколькими проводниками с током, то индукция результирующего поля есть векторная сумма индукций полей, создаваемых каждым проводником. Точно так же для однородного проводника с током наблюдаемая на опыте индукция $\mathbf{B}$ есть векторная сумма элементарных индукций $\Delta\mathbf{B}$, создаваемых отдельными участками провода.

Закон Био–Савара–Лапласа. На опыте невозможно осуществить отдельный участок тока, так что нельзя непосредственно измерить и создаваемое им поле. Измерить можно только суммарную индук-

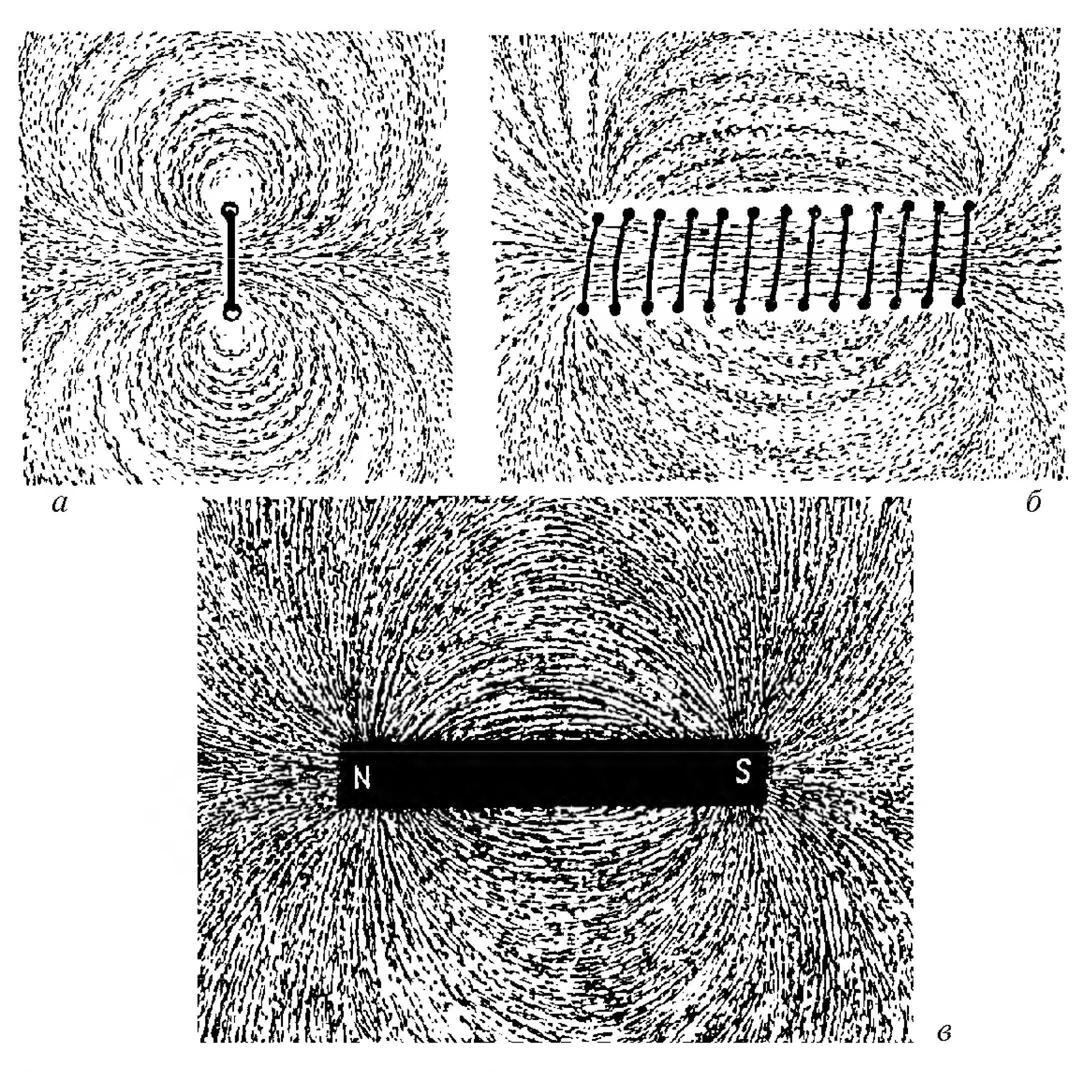


Рис. 90. Полученные с помощью железных опилок картины различных магнитных полей

цию магнитного поля, создаваемого всеми элементами тока. Существует закон, называемый *законом Био—Савара—Лапласа*, который, будучи применен к участкам провода произвольной формы, позволяет во всех случаях рассчитать значение результирующей индукции магнитного поля.

Закон Био—Савара—Лапласа формулируется следующим образом. Элемент провода Δl, по которому течет ток I, создает в вакууме магнитное поле, индукция ΔB которого в некоторой точке обратно пропорциональна квадрату расстояния r от элемента тока до точки наблюдения. В СИ этот закон имеет вид

$$\Delta B = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I\Delta l \cdot \sin\alpha}{r^2}, \qquad (3)$$

где μ_0 — так называемая *магнитная постоянная*, а α — угол между направлением на точку наблюдения и направлением элемента тока. Вектор $\Delta\mathbf{B}$ перпендикулярен плоскости, содержащей элемент Δl и радиус-вектор $\mathbf{r}$ (рис. 91).

Направление $\Delta\mathbf{B}$ определяется правилом правого винта: оно совпадает с направлением вращения головки винта при его поступа-

тельном перемещении вдоль тока. Используя понятие векторного произведения, закон Био—Савара—Лапласа можно переписать в векторном виде:

$$\Delta \mathbf{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{\Delta \mathbf{l} \times \mathbf{r}}{r^3}. \qquad (4)$$

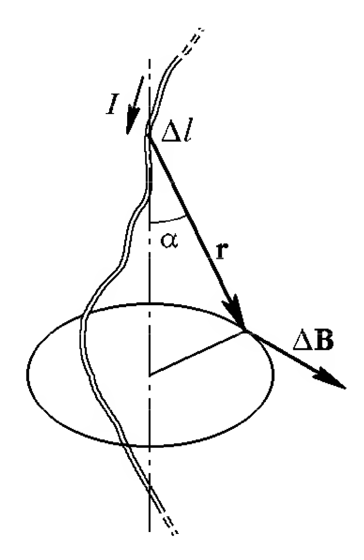


Рис. 91. К закону Био—Савара—Лапласа

Здесь вектор $\Delta \mathbf{l}$ направлен вдоль провода в направлении движения положительных зарядов. Фигурирующая в формулах (3) и (4) магнитная постоянная μ_0 вводится при установлении единицы силы тока СИ (ампера) на основе магнитного взаимодействия параллельных проводников с током. Этот вопрос будет рассмотрен ниже.

Поле кругового тока. Формула (3) (или (4)) позволяет рассчитать индукцию магнитного поля, создаваемого произвольным распределением постоянных токов. Простейшим примером использования закона Био—Савара—Лапласа служит вычисление магнитного поля в центре кругового тока. Пусть ток I идет по проводу в виде окружности радиуса R по часовой стрелке (рис. 92). Векторы $\Delta \mathbf{B}$ от всех элементов кольцевого провода направлены перпендикулярно плоскости круга за плоскость рисунка. Поэтому суммарная индукция магнитного поля $\mathbf{B}$ направлена в ту же сторону, а ее модуль равен сумме всех $\Delta \mathbf{B}$. Любой элемент кругового контура находится на одном и том же расстоянии $r = R$ от центра круга, а его направление образует прямой угол $\alpha = \pi/2$ с направлением на точку наблюдения. Поэтому, суммируя элементарные индукции, с помощью формулы (3) получаем

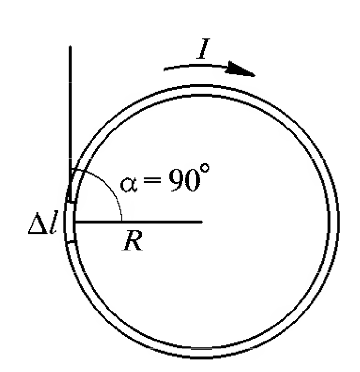


Рис. 92. К вычислению магнитного поля кругового тока

$$B = \sum \Delta B = \frac{\mu_0 I}{4\pi R^2} \sum \Delta l .$$

Сумма длин всех элементарных участков $\sum \Delta l$ равна длине окружности $2\pi R$, поэтому индукция магнитного поля в центре кругового тока равна

$$B = \frac{\mu_0 I}{2R}. \qquad (5)$$

Расчет магнитного поля, создаваемого токами других конфигураций, выполняется с помощью интегрирования. Эти расчеты часто упрощаются при учете симметрии картины токов, создающих магнитное поле.

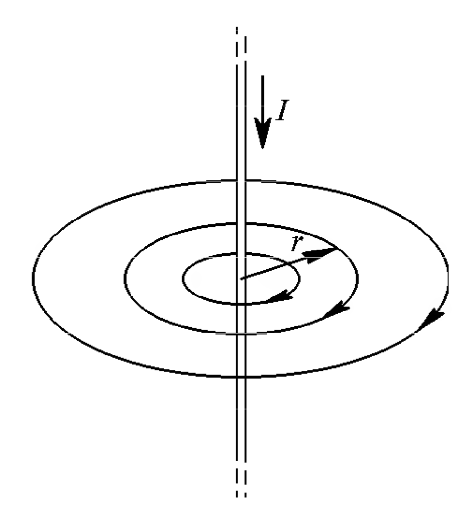


Рис. 93. Линии магнитной индукции прямолинейного проводника с током

Индукция магнитного поля, создаваемого бесконечным прямолинейным проводником с током, убывает обратно пропорционально расстоянию r от провода. Ее значение дается выражением

$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}. \qquad (6)$$

Линии магнитной индукции в этом случае представляют собой концентрические окружности, плоскости которых перпендикулярны току, а центры расположены на оси тока (рис. 93). Чем ближе к проводнику, тем больше густота магнитных силовых линий.

Теорема о циркуляции. Магнитное поле может быть охарактеризовано некоторым общим соотношением, которое, как и теорема Гаусса в электростатике, может быть использовано для расчета магнитных полей, создаваемых симметричными распределениями токов. Это соотношение носит название *теоремы о циркуляции вектора магнитной индукции.*

Рассмотрим произвольный замкнутый контур l и зададим на нем направление обхода. Обозначим через B_l проекцию вектора **B** на направление элемента контура Δl. Составим сумму произведений $B_l \Delta l$ для всех элементов замкнутого контура. Эта сумма $\sum B_l \, \Delta l$ называется циркуляцией вектора **B** по замкнутому контуру l. Можно показать что, в силу закона Био—Савара—Лапласа циркуляция вектора **B** по произвольному замкнутому контуру равна произведению μ_0 на ток I, пронизывающий контур, по которому берется циркуляция.

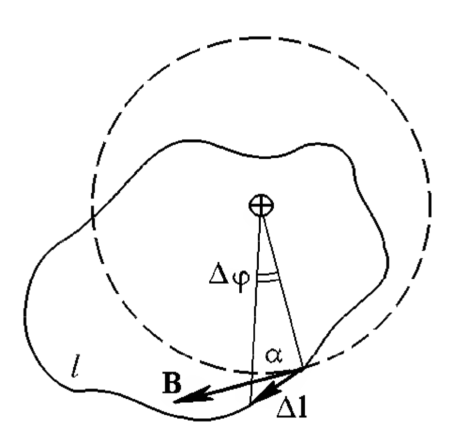


Рис. 94. К теореме о циркуляции вектора индукции магнитного поля

Проверим справедливость этого утверждения для магнитного поля, создаваемого прямолинейным проводником с током. Прежде всего отметим, что нужно рассматривать только контуры, лежащие в плоскости, перпендикулярной проводнику, так как вектор **B** в силу (4) не имеет составляющих, параллельных проводнику с током, и, следовательно, циркуляция **B** по произвольному контуру совпадает с циркуляцией по проекции контура на эту плоскость. Проще всего рассчитать циркуляцию **B** по круговому контуру с центром на проводнике. В этом случае вектор **B** в каждой точке контура параллелен элементу Δl (если выбранное направление обхода совпадает с направлением силовых

линий), а модуль B, одинаковый во всех точках контура, дается формулой (6). Суммируя $B_l \Delta l$ по всем элементам контура, получаем

$$\sum B_l \Delta l = B \sum \Delta l = \frac{\mu_0 I}{2\pi R} 2\pi R = \mu_0 I. \quad (7)$$

Видно, что циркуляция **B** не зависит от радиуса окружности. Нетрудно убедиться в том, что при произвольной деформации окружности циркуляция **B** не изменится. Рассмотрим элемент Δl произвольного контура l (рис. 94). Для него $B_l \Delta l = B \Delta l \cos \alpha$; но $\Delta l \cos \alpha = r \Delta\varphi$, поэтому

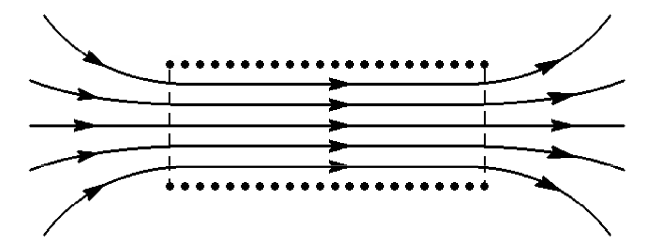
$$B_l \, \Delta l = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \, r \, \Delta\varphi = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \, \Delta\varphi.$$

Суммируя по всем элементам контура, получаем

$$\sum B_l \, \Delta l = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \sum \Delta\varphi = \mu_0 I. \quad (8)$$

Теорема о циркуляции вектора индукции магнитного поля справедлива для поля, создаваемого произвольным распределением токов.

Поле в соленоиде. Применим теорему о циркуляции вектора индукции магнитного поля к расчету поля, создаваемого соленоидом, т. е. цилиндрической катушкой с плотно соприкасающимися витками. Магнитное поле такой катушки имеет вид, показанный на рис. 95. Если длина катушки много больше ее диаметра, то линии магнитной индукции внутри катушки параллельны ее оси и поле там однородно всюду, за исключением концов катушки. Снаружи вблизи боковой поверхности катушки поле практически отсутствует.


Рис. 95. Магнитное поле соленоида

Вычислим циркуляцию индукции **B** по прямоугольному контуру, показанному на рис. 96: сторона bc параллельна, а стороны ab и cd

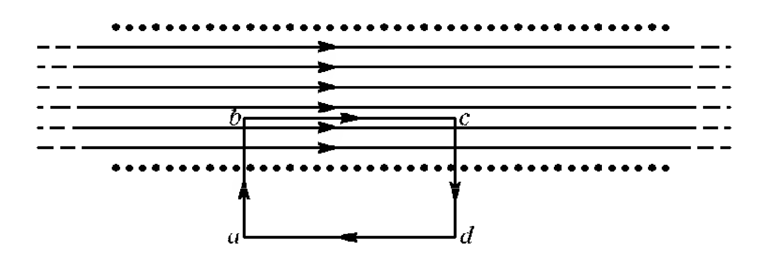


Рис. 96. Контур для применения теоремы о циркуляции

перпендикулярны линиям индукции внутри катушки. Тогда вектор **B** будет иметь отличную от нуля проекцию на направление контура только на участке bc и циркуляция **B** по контуру равна Bl, где l — длина участка bc. Подсчитаем теперь полный ток, пронизывающий

выбранный контур. Обозначим число витков на единицу длины соленоида через n. Сквозь выбранный контур проходит nl витков, и полный ток равен Inl. Согласно теореме о циркуляции

$$Bl = \mu_0 Inl,$$

откуда

$$B = \mu_0 In. \tag{9}$$

Формула (9) дает значение индукции магнитного поля внутри длинного соленоида, по обмотке которого пропускается ток I.

Вблизи краев соленоида поле уже не будет однородным. Легко показать, что индукция поля на оси соленоида на самом его конце равна половине значения индукции внутри соленоида. Если к концу соленоида приставить другой такой же соленоид, по которому в том же направлении протекает такой же ток, то рассматриваемая точка окажется внутри нового, составного соленоида и индукция поля в ней будет определяться формулой (9). Но по принципу суперпозиции эта же индукция есть сумма индукций полей, существующих вблизи концов каждого соленоида. Поскольку соленоиды одинаковы, то одинаковы и создаваемые ими поля, и, следовательно, индукция магнитного поля в точке на оси на конце одного соленоида равна $B = (1/2)\mu_0 In$.

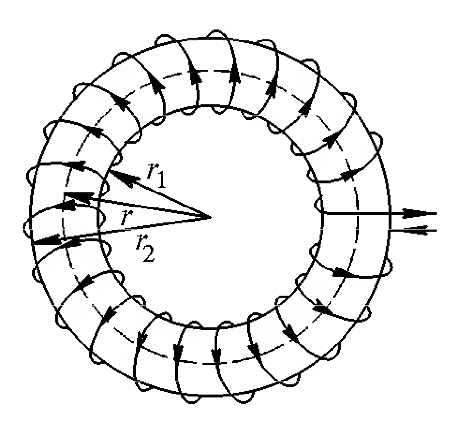


Рис. 97. Тороидальная катушка

Поле в тороидальной катушке. Вычислим индукцию магнитного поля внутри замкнутой тороидальной катушки (рис. 97). В отличие от соленоида линии магнитной индукции замыкаются здесь внутри самой катушки и представляют собой окружности, параллельные оси тора. Направление их таково, что, глядя вдоль них, мы видим токи в обмотке тороидальной катушки текущими по часовой стрелке. Вычислим циркуляцию вектора магнитной индукции вдоль одной из таких линий. Из соображений симметрии очевидно, что модуль вектора индукции **B** одинаков во всех точках, лежащих на одной линии индукции. Пусть радиус такой окружности равен r ($r_1 < r < r_2$). Тогда по теореме о циркуляции имеем

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 IN,$$

где N — полное число витков, а I — ток в обмотке тороидальной катушки. Отсюда

$$B = \frac{\mu_0 IN}{2\pi r}. \tag{10}$$

Формула (10) показывает, что индукция магнитного поля в торе максимальна вблизи внутренней стороны и минимальна вблизи внешней стороны тора.

Выражение для индукции магнитного поля в длинном соленоиде (9) может быть получено как предельный случай формулы (10) для поля в тороидальной катушке при условии, что диаметр витков много меньше радиуса самого тора. В этом случае $(r_2 - r_1)/r \ll 1$, поле внутри тора практически однородно, а отношение $N/(2\pi r)$ представляет собой число витков на единицу длины катушки.

Поле внутри проводника с током. Вернемся к формуле (6) для индукции магнитного поля прямолинейного бесконечного проводника с током. Для очень тонкого проводника, когда r стремится к нулю, индукция магнитного поля вблизи проводника неограниченно возрастает. Реально провод всегда имеет конечную толщину. С помощью теоремы о циркуляции индукции магнитного поля легко убедиться, что снаружи проводника индукция поля по-прежнему выражается формулой (6), а внутри проводника значение индукции зависит от рас-

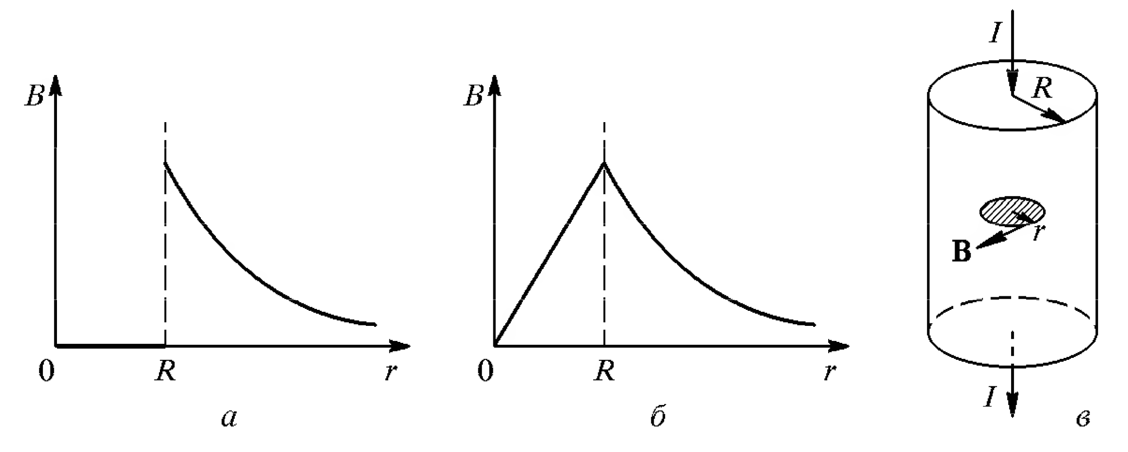


Рис. 98. Магнитное поле прямого тока, текущего по поверхности цилиндрического проводника (*а*), по всему сечению (*б*); к расчету магнитного поля внутри проводника (*в*)

пределения тока по сечению проводника. Если весь ток течет только по поверхности цилиндрического проводника, как это бывает в полой тонкостенной трубке или в сверхпроводниках, то магнитного поля внутри нет. Зависимость индукции от расстояния r до оси проводника имеет в этом случае вид, показанный на рис. 98*а*.

Если ток равномерно распределен по сечению проводника, то магнитное поле внутри проводника пропорционально расстоянию от его оси (рис. 98*б*). Чтобы убедиться в этом, рассмотрим циркуляцию **B** по круговому контуру радиуса r, лежащему внутри проводника в плоскости, перпендикулярной его оси (рис. 98*в*). По соображениям симметрии модуль вектора индукции одинаков для всех точек, лежащих на такой окружности. Так как магнитное поле направлено по касательной к окружности, то по теореме о циркуляции имеем

$$B \cdot 2\pi r = \mu_0 I', \qquad (11)$$

где I' — ток, проходящий через заштрихованную на рисунке часть сечения провода, охватываемую этой окружностью. При равномер-

ном распределении тока по сечению провода

$$I' = I\left(\frac{r}{R}\right)^2,$$

поэтому согласно (11) индукция поля внутри проводника равна

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} I \frac{r}{R^2}. \qquad (12)$$

Обратим внимание, что для магнитного поля интегральное соотношение, облегчающее расчет полей при наличии симметрии, содержит циркуляцию вектора индукции по замкнутому контуру, а не поток вектора через поверхность, как это было в случае теоремы Гаусса в электростатике. Это связано с отсутствием в природе магнитных зарядов, на которых могли бы начинаться и заканчиваться магнитные силовые линии. В результате магнитные силовые линии всегда замкнуты, а поток вектора **B** через любую замкнутую поверхность равен нулю.

Магнитный поток. Поток вектора индукции **B** (магнитный поток) через незамкнутую поверхность определяется по тому же правилу, что и поток вектора **E** в электростатике. *Магнитным потоком* Φ через поверхность площадью **S** называется скалярное произведение вектора **B** на вектор **S**, модуль которого равен площади S этой поверхности, а направление совпадает с направлением нормали **n** к поверхности:

$$\Phi = \mathbf{B}\cdot\mathbf{S} = BS\cos\alpha, \qquad (13)$$

где α — угол между вектором **B** и вектором **n** нормали к поверхности. Поток может быть как положительным, так и отрицательным в зависимости от выбора направления нормали к поверхности.

В случае неоднородного магнитного поля поток через какую-либо поверхность равен алгебраический сумме потоков через участки поверхности, в пределах которых поле можно считать однородным.

Магнитный поток, как и поток напряженности электрического поля, допускает наглядную геометрическую интерпретацию. Его можно считать равным числу магнитных силовых линий, пересекающих поверхность.

Единицей магнитного потока в СИ является вебер (Вб). Магнитный поток в 1 Вб создается однородным магнитным полем с индукцией 1 Тл через поверхность площадью 1 м^2, расположенную перпендикулярно вектору магнитной индукции.

Магнитный поток играет важную роль в описании явления электромагнитной индукции.

Магнитное поле движущегося заряда. Мы знаем, что каждый проводник с током создает в окружающем пространстве магнитное поле. Но электрический ток — это упорядоченное движение электрических

зарядов. Отсюда можно заключить, что всякий движущийся заряд создает вокруг себя магнитное поле. Индукцию этого магнитного поля нетрудно найти, исходя из закона Био—Савара—Лапласа.

Рассмотрим произведение $I\Delta l$, входящее в формулу (3), и выразим в нем силу тока I через концентрацию n носителей заряда в проводнике, их заряд e и скорость v их направленного движения:

$$I = jS, \quad j = nev.$$

При подстановке этих выражений для $I\Delta l$ получаем

$$I\Delta l = evnS\,\Delta l.$$

Произведение $nS\Delta l$ дает полное число носителей заряда N в объеме $V = S\Delta l$ выделенного элемента проводника. Поэтому

$$I\Delta l = evN. \tag{14}$$

Если подставить это выражение в (3) и разделить на число носителей заряда N, то получится выражение для индукции магнитного поля, создаваемого зарядом e, движущимся со скоростью v:

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{ev\sin\alpha}{r^2}, \tag{15}$$

где r — расстояние от заряда до точки наблюдения, а α — угол между его скоростью и направлением на эту точку. Вводя радиус-вектор $\mathbf{r}$, проведенный из заряда в точку наблюдения, можно записать (15) в векторном виде:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{2\pi}\,e\,\frac{\mathbf{v}\times\mathbf{r}}{r^3}. \tag{16}$$

В прошлом веке отнюдь не было очевидно, что электрический ток в проводе и движущееся заряженное тело эквивалентны в отношении создания магнитного поля. Впервые появление магнитного поля при механическом движении заряженного тела было установлено Г. Роуландом, что и в наши дни представляет трудную экспериментальную задачу, поскольку требует обнаружения магнитных полей, почти в 10^5 раз более слабых, чем магнитное поле Земли.

В опытах Роуланда использовались быстро вращающиеся эбонитовые диски, которым предварительно сообщался электрический заряд. О возникновении магнитного поля можно было судить по отклонению маленькой магнитной стрелки. Опыты показали соответствие этой силы формулам (15) и (16).

- Какое направление принимается за направление вектора магнитной индукции? Как можно определить это направление на опыте?
- Сформулируйте закон Био—Савара—Лапласа и разъясните, как его следует применять для расчета магнитных полей.
- В чем заключается принципиальное отличие применения принципа суперпозиции при расчете электростатического поля системы зарядов и магнитного поля токов?

- В чем заключается теорема о циркуляции вектора магнитной индукции?
- Какова роль соображений симметрии при расчете магнитных полей, создаваемых различными распределениями токов? Приведите соответствующие примеры.
- Сравните теорему Гаусса в электростатике с теоремой о циркуляции вектора магнитной индукции.
- Что такое магнитный поток? В чем заключается геометрическая интерпретация этой физической величины?
- Как направлено магнитное поле вращающегося заряженного диска в опытах Роуланда? Как должна быть расположена магнитная стрелка, чтобы это поле можно было обнаружить?

Δ **О потенциале магнитного поля.** Возможность введения потенциала электростатического поля была связана с тем, что работа поля при перемещении заряда не зависела от формы пути, а для любого замкнутого контура была равна нулю. Работа при перемещении единичного заряда по замкнутому контуру равна циркуляции вектора **E**. Поскольку циркуляция вектора **B** может быть отличной от нуля (именно так и будет, если замкнутый контур охватывает какой-либо проводник с током), то для магнитного поля ввести потенциал, который характеризовал бы каждую его точку, невозможно. Такое понятие можно ввести только при условии, если не рассматривать контуры, охватывающие ток: область, занимаемая полем, должна быть односвязной, т. е. в ней любой замкнутый контур можно стянуть в точку, не пересекая проводников с током.

Магнитный момент кругового тока. Вернемся к вопросу о магнитном поле, создаваемом круговым током, и рассчитаем индукцию этого поля не только в центре кольца, но и в любой точке, лежащей на оси симметрии этого кольца (рис. 99*а*). Выделим элемент тока $\Delta\mathbf{l}$ и рассмотрим индукцию $\Delta\mathbf{B}$ поля, создаваемого этим элементом в точке A, отстоящей на расстояние z от плоскости кольца. На основании закона Био—Савара—Лапласа для $\Delta\mathbf{B}$ можно написать

$$\Delta\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\Delta\mathbf{l}\times\mathbf{r}}{r^3},$$

а для модуля ΔB, учитывая, что векторы $\mathbf{r}$ и $\Delta\mathbf{l}$ взаимно перпендикулярны, имеем

$$\Delta B = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{\Delta l}{r^2}.$$

Очевидно, что вектор $\Delta\mathbf{B}$ лежит в плоскости, проходящей через ось симметрии кольца и радиус-вектор $\mathbf{r}$ точки наблюдения A, проведенный из элемента $\Delta\mathbf{l}$. В этой плоскости вектор $\Delta\mathbf{B}$ перпендикулярен вектору $\mathbf{r}$.

Рассмотрим теперь наряду с $\Delta\mathbf{l}$ симметричный ему элемент тока $\Delta\mathbf{l}'$, лежащий на противоположном конце диаметра (рис. 99*а*). Вектор $\Delta\mathbf{B}'$ создаваемого им поля в точке A расположен симметрично вектору $\Delta\mathbf{B}$ относительно оси кольца и равен ему по модулю. Поэтому вектор индукции их суммарного магнитного поля направлен по оси кольца. Поскольку все кольцо с током можно разбить на такие пары элементов, то вектор индукции магнитного поля, создаваемого всем кольцом, тоже направлен вдоль оси кольца.

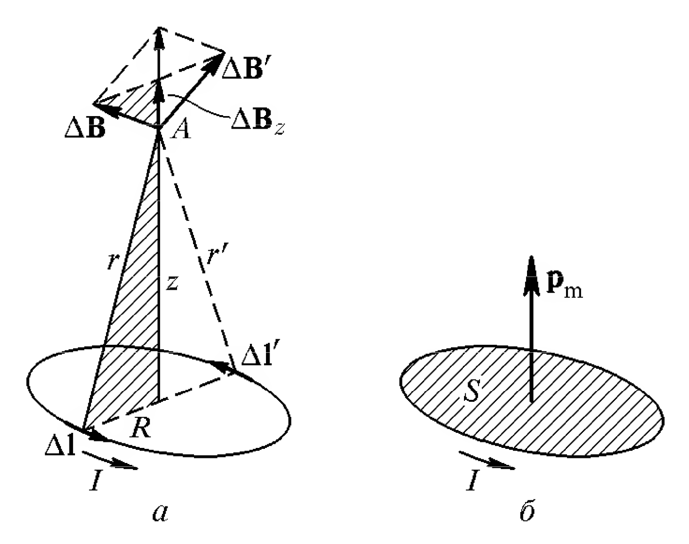


Рис. 99. К расчету магнитного поля кругового тока (*а*) и магнитный момент тока (*б*)

Найдем вклад $\Delta\mathbf{B}_z$ элемента тока $\Delta\mathbf{l}$ в этот результирующий вектор. Из подобия заштрихованных треугольников на рис. 99*а* следует, что

$$\Delta B_z/\Delta B = R/r.$$

Подставляя сюда значение ΔB, для ΔB_z получаем

$$\Delta B_z = \Delta B\,\frac{R}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi}\,\frac{IR\,\Delta l}{r^3}.$$

Суммирование магнитных полей ΔB_z от всех элементов кольца сводится к замене Δl на полную длину кольца $2\pi R$. В результате для индукции B_z результирующего поля получаем

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2}\,\frac{R^2}{r^3} = \frac{\mu_0 I}{2}\,\frac{R^2}{(R^2+z^2)^{3/2}}. \qquad (17)$$

Легко видеть, что формула (17) дает тот же результат для индукции магнитного поля в центре кольца: полагая в ней $z=0$, получаем выражение (5).

На больших по сравнению с размерами кольца расстояниях, когда $R \ll z$, в знаменателе (17) можно пренебречь слагаемым R^2 по сравнению с z^2, или, другими словами, считать одинаковыми расстояния r и z (рис. 99*а*). В этом случае (17) принимает вид

$$B_z = \frac{\mu_0 I}{2}\,\frac{R^2}{z^3}. \qquad (18)$$

Обратим внимание на то, что на больших расстояниях от кольца индукция создаваемого им магнитного поля и направлена, и зависит от расстояния так же, как и напряженность электрического поля на оси электрического диполя. Оказывается, что

эта аналогия справедлива не только для точек на оси, но и во всем пространстве. Например, в точках, лежащих в плоскости кольца на большом расстоянии от него, индукция направлена перпендикулярно этой плоскости, убывает обратно пропорционально третьей степени расстояния и вдвое меньше значения в точках на оси, расположенных на таком же расстоянии. Поэтому кольцо с током можно рассматривать как *магнитный диполь*.

Формулы для полей электрического и магнитного диполей будут иметь совершенно аналогичный вид, если ввести *магнитный момент* $\mathbf{p}_m$ кругового тока как вектор, направленный вдоль оси симметрии кольца (рис. 99*б*), модуль которого равен произведению силы тока I на площадь кольца $S = \pi R^2$:

$$p_m = IS. \tag{19}$$

Направление вектора $\mathbf{p}_m$ связано с направлением тока в кольце правилом правого винта.

Индукция магнитного поля кольца, выражаемая формулой (18), теперь запишется в виде

$$B_z = \frac{\mu_0}{4\pi}\frac{2p_m}{z^3}. \tag{20}$$

Введенное определение магнитного момента (19) имеет смысл для любого замкнутого контура с током, а не только для круговой рамки: магнитное поле на больших расстояниях не зависит от формы контура, подобно тому, как электрическое поле любой электронейтральной в целом системы зарядов (например, молекулы) эквивалентно полю диполя.

Магнитный дипольный момент — это важная физическая характеристика контура с током, через которую выражается не только создаваемое им поле, но и действие на него других магнитных полей. Например, формула (2), служащая определением индукции магнитного поля, записывается через магнитный момент следующим образом:

$$B = M_{\max}/p_m.$$

Более того, использование понятия магнитного момента позволяет в векторном виде записать выражение для механического момента сил, действующих на контур (рамку с током) в магнитном поле при произвольной ориентации контура:

$$\mathbf{M} = \mathbf{p}_m \times \mathbf{B}. \tag{21}$$

Как уже отмечалось, для магнитного поля не существует аналога точечного заряда как источника поля и как пробного объекта, действием на который проявляет себя это поле. Простейший объект такого рода для магнитного поля это не магнитный заряд, а магнитный диполь, свойства которого уже вполне аналогичны свойствам электрического диполя. ▲

- Почему понятие потенциала магнитного поля можно ввести только для односвязной области?
- Почему замкнутый контур с током можно рассматривать как аналог электрического диполя?
- Почему малый элемент линейного тока нельзя считать аналогом точечного электрического заряда, несмотря на то, что индукция создаваемого им магнитного поля убывает обратно пропорционально квадрату расстояния?
- Покажите, что направление и модуль момента сил, действующего на замкнутый контур с током во внешнем магнитном поле, определяется формулой (21).

§ 16. Действие магнитного поля на движущиеся заряды

Магнитное поле, какими бы источниками — катушками с током или постоянными магнитами — оно ни создавалось, проявляет себя прежде всего в механическом действии на движущиеся заряды и на проводники с током.

Сила Ампера. Рассмотрим сначала силу, действующую на проводник с током, находящийся в магнитном поле — *силу Ампера*. Ее существование можно продемонстрировать простым опытом, схема которого показана на рис. 100. Направление силы Ампера соответствует *правилу левой руки*: когда магнитные силовые линии входят в ладонь, а четыре выпрямленных пальца указывают направление тока, отставленный в сторону большой палец указывает направление

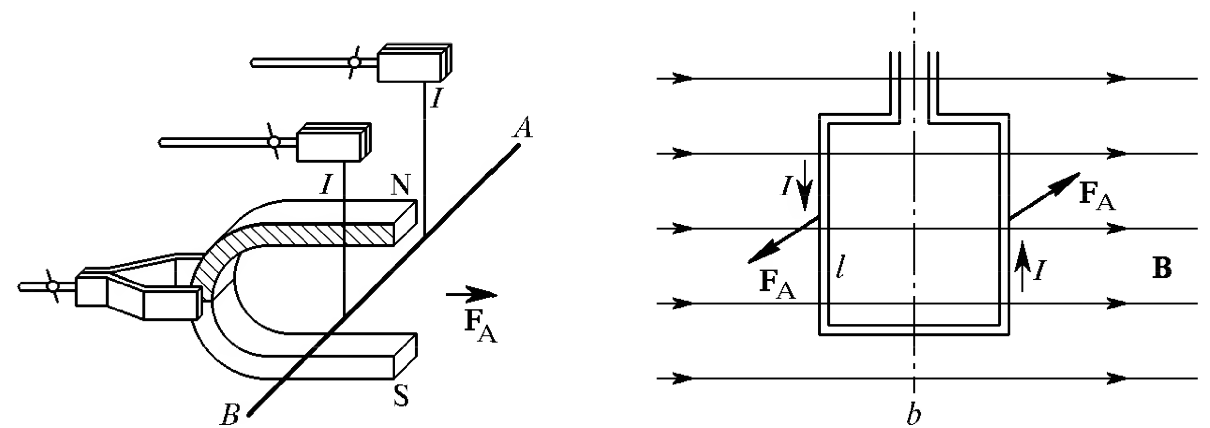


Рис. 100. Обнаружение силы, действующей на проводник с током в магнитном поле

Рис. 101. К выводу выражения для силы Ампера

силы. Именно на использовании этой силы основано действие электроизмерительных приборов магнитоэлектрической системы.

Сила Ампера тем больше, чем больше сила тока в проводнике и чем больше индукция магнитного поля. Выражение для этой силы можно получить с помощью формулы (2) § 15, определяющей индукцию магнитного поля через максимальное значение вращающего момента, действующего на рамку с током в однородном магнитном

поле. Этот момент обусловлен действующими на стороны рамки силами Ампера. Когда рамка расположена так, как показано на рис. 101 (т. е. магнитные силовые линии параллельны ее плоскости), силы действуют только на ее вертикальные стороны, так как горизонтальные стороны направлены вдоль силовых линий.

Силы Ампера F_A, действующие на вертикальные стороны рамки, одинаковы и направлены в противоположные стороны, т. е. образуют пару, момент которой равен произведению одной из них на плечо b:

$$M = F_A b. \tag{1}$$

При указанной ориентации рамки этот момент сил максимален и в соответствии с формулой (2) § 15 равен

$$M = BIS = BIlb. \tag{2}$$

Приравнивая правые части (1) и (2), получаем выражение для силы Ампера, действующей на проводник длиной l с током I, расположенный перпендикулярно силовым линиям магнитного поля с индукцией B:

$$F_A = IBl. \tag{3}$$

Эта формула записана в СИ, где сила тока измеряется в амперах, индукция магнитного поля — в тесла, длина — в метрах. Значение силы получается в ньютонах.

Если проводник с током расположен под углом α к вектору $\mathbf{B}$, то вклад в силу Ампера дает только составляющая магнитного поля, перпендикулярная проводнику. В этом случае выражение для силы Ампера записывается в виде

$$F_A = IBl \sin \alpha. \tag{4}$$

Выражение для вектора $\Delta\mathbf{F}$ силы, действующей на элемент $\Delta\mathbf{l}$ проводника, можно записать, используя векторное произведение:

$$\Delta\mathbf{F} = I\Delta\mathbf{l} \times \mathbf{B}. \tag{5}$$

Зная силу $\Delta\mathbf{F}$, действующую на отдельный элемент проводника с током, можно найти силу, действующую на весь проводник.

Взаимодействие двух параллельных токов. В качестве примера рассмотрим силу взаимодействия двух бесконечных параллельных проводников, по которым идут токи I_1 и I_2 (рис. 102). Будем искать силу, действующую на проводник *1* в магнитном поле, создаваемом проводником *2*. Индукция этого магнитного поля выражается формулой (6) § 15, в которую в качестве I следует подставить ток I_2 в проводнике *2*, а в качестве r — расстояние d между проводниками:

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi}\frac{I_2}{d}. \tag{6}$$

Кольцевые магнитные силовые линии этого поля перпендикулярны проводнику *1*, поэтому в соответствии с формулой (3) действующая

на его участок длиной l сила Ампера равна

$$F = I_1 B l = \frac{\mu_0}{2\pi} I_1 \frac{I_2}{d} l. \qquad (7)$$

Если рассмотреть силу, действующую на проводник *2* в магнитном поле, создаваемом проводником *1*, то получится тот же самый результат (7). Когда токи текут в проводниках в одном направлении, эти проводники притягиваются, когда в противоположных направлениях — отталкиваются. Обратим внимание, что сила, действую-

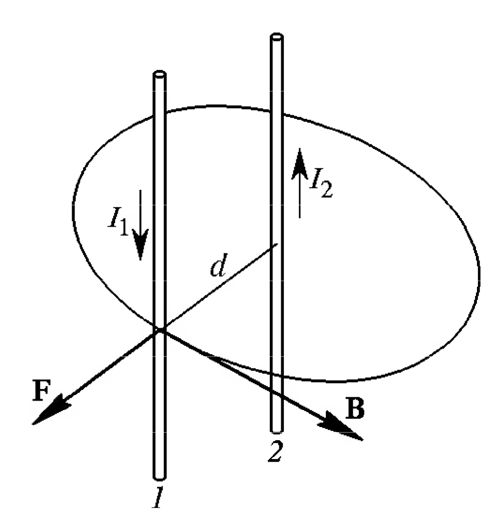


Рис. 102. Взаимодействие двух параллельных проводников с токами

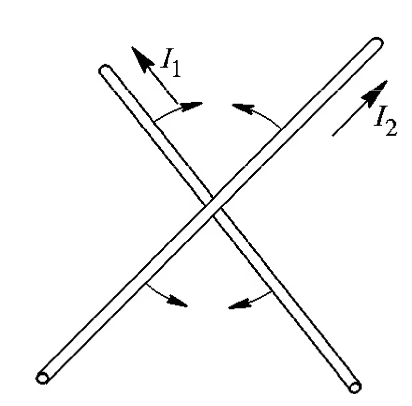


Рис. 103. Взаимодействие двух скрещенных прямолинейных токов

щая на участок одного проводника в магнитном поле другого проводника, обратно пропорциональна расстоянию между ними.

Если токи текут по двум скрещенным прямым проводам (рис. 103), то между токами действуют силы, стремящиеся повернуть проводники так, чтобы они встали параллельно друг другу и чтобы токи в них текли в одну сторону.

Полная магнитная сила, действующая на ток. При расчете полной силы Ампера, действующей на малый участок бесконечного тонкого проводника с током (как прямого, так и криволинейного), ситуация во многом аналогична той, с которой мы сталкивались в электростатике при нахождении силы, действующей на малый участок поверхности заряженного проводника. Как и в электростатике, здесь необходимо учитывать поле (в данном случае магнитное), создаваемое как всеми другими источниками (другими токами, постоянными магнитами и т. д.), так и всеми остальными участками рассматриваемого проводника с током, кроме выделенного, для которого мы рассчитываем действующую силу.

Для бесконечного прямолинейного тонкого проводника с током подобный эффект «самодействия» отсутствует, так как в соответствии с законом Био—Савара—Лапласа любой его участок не создает магнитного поля в точках, где расположены другие участки этого тонкого проводника. Для изогнутого тонкого проводника, например

кольца с током, ситуация уже иная, так как на отдельный участок уже будут действовать силы со стороны магнитного поля, создаваемого другими участками проводника.

В случае «толстого» проводника (имеющего конечное поперечное сечение) магнитные силы «самодействия» уже отличны от нуля даже при его прямолинейной конфигурации. Это легко понять, если представить этот «толстый» провод как жгут из параллельных тонких токов (если ток распределен по сечению толстого провода) или как трубу (если ток идет только по поверхности толстого провода). Такие силы стремятся сжать провод к оси. Таким эффектом объясняется сжатие плазменного шнура с током собственным магнитным полем.

Единица силы тока — ампер. Мы уже отмечали, что четвертая основная единица Международной системы единиц — ампер — определяется через магнитное взаимодействие токов. Для этого используют закон взаимодействия двух параллельных токов (7). По определению ампер — это сила неизменяющегося тока, который, проходя по двум прямым параллельным проводникам бесконечной длины и ничтожно малого поперечного сечения, расположенным в вакууме на расстоянии 1 м один от другого, создал бы между этими проводниками силу, равную $2\cdot 10^{-7}$ Н на каждый метр длины.

Отсюда непосредственно получается значение магнитной постоянной μ_0, которое уже использовалось выше. Из формулы (7) и определения ампера следует, что

$$2\cdot 10^{-7}\ \text{Н} = \mu_0 \frac{1\ \text{А}\cdot 1\ \text{А}}{2\pi\cdot 1\ \text{м}}\cdot 1\ \text{м},$$

откуда

$$\mu_0 = 4\pi\cdot 10^{-7}\ \text{Н/А}^2.$$

Механическая работа в магнитном поле. Так как на проводник с током в магнитном поле действуют силы Ампера, то при движении проводника эти силы совершают определенную работу. Найдем эту работу.

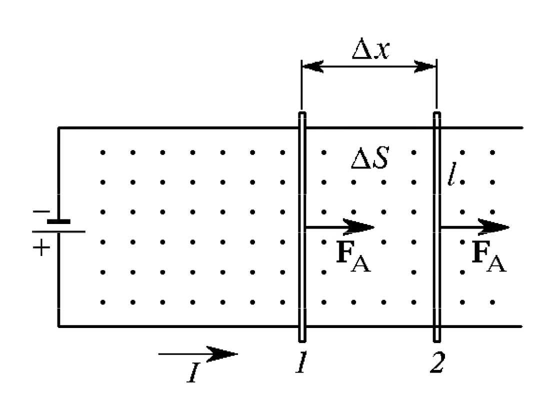


Рис. 104. К вычислению работы силы Ампера при поступательном движении проводника в магнитном поле

Для простоты рассмотрим поступательное движение прямого проводника длины l в однородном магнитном поле. Чтобы поддерживать в этом проводнике постоянный ток I, будем считать, что он скользит по параллельным шинам, замыкая электрическую цепь (рис. 104). Если магнитное поле с индукцией **B** направлено на нас, то сила Ампера $\mathbf{F}_A$ действует вправо. Допустим, что проводник совершает перемещение Δx вправо из положения *1* в положение *2*. Так как перемещаемый про-

водник перпендикулярен магнитному полю, то для силы Ампера справедливо выражение (3) и для работы ΔA имеем

$$\Delta A = F_{\text{A}}\Delta x = IBl\,\Delta x. \tag{8}$$

Произведение $l\,\Delta x$ равно заштрихованной на рис. 104 площади ΔS. Произведение магнитной индукции B на ΔS равно изменению $\Delta\Phi$ магнитного потока сквозь поверхность, ограниченную контуром с током:

$$\Delta\Phi = B\Delta S. \tag{9}$$

Таким образом, работа силы Ампера может быть выражена через силу тока I в перемещаемом проводнике и изменение $\Delta\Phi$ магнитного потока через контур, в который включен этот проводник:

$$\Delta A = I\Delta\Phi. \tag{10}$$

Выражая магнитный поток в веберах, а силу тока в амперах, получаем работу в джоулях.

Если магнитное поле неоднородно, то с помощью (10) можно подсчитать работу сил Ампера на тех участках, в пределах которых магнитное поле можно считать однородным, а затем суммировать работы на отдельных участках.

Отметим, что выражение (10) для работы справедливо не только для рассмотренного движения части контура, но и при любой деформации контура, сопровождающейся изменением пронизывающего его магнитного потока.

Работа силы Ампера при движении проводника с током в магнитном поле лежит в основе действия электродвигателей, в которых происходит превращение электрической энергии в механическую.

Сила Лоренца. Вернемся теперь к действию магнитного поля на ток. Так как электрический ток есть направленное движение заряженных частиц (электронов или ионов), то отсюда следует, что на движущийся заряд в магнитном поле действует сила. Получим выражение для этой силы.

На проводник длиной l с током I действует сила, определяемая формулой (4):

$$F_{\text{A}} = IBl\sin\alpha. \tag{11}$$

Как мы видели в предыдущем параграфе при рассмотрении магнитного поля, создаваемого движущимися зарядами, произведение Il может быть выражено через заряд e, скорость v направленного движения и полное число N носителей по формуле (14):

$$Il = evN.$$

При такой замене угол α в (11) можно рассматривать как угол между вектором $\mathbf{B}$ и скоростью $\mathbf{v}$ носителей, так как их направленное движение происходит вдоль провода. Таким образом, для дейст-

вующей на все N носителей силы из (11) получаем

$$F_{\text{А}} = NevB \sin \alpha. \tag{12}$$

Разделив (12) на N, найдем силу F, действующую на одну частицу с зарядом e, движущуюся со скоростью $\mathbf{v}$ под углом α к магнитному полю:

$$F = F_{\text{А}}/N = evB \sin \alpha. \tag{13}$$

Эта сила перпендикулярна скорости заряда $\mathbf{v}$ и индукции магнитного поля $\mathbf{B}$, а ее модуль пропорционален синусу угла между этими векторами. Именно таким свойством обладает векторное произведение. Поэтому выражение для силы $\mathbf{F}$ можно записать с помощью векторного произведения:

$$\mathbf{F} = e\, \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \tag{14}$$

Порядок сомножителей в векторном произведении в (14) выбран так, чтобы обеспечить соответствие с правилом левой руки, определяющим направление действующей на ток силы Ампера.

Если имеется еще и электрическое поле, то полная действующая на заряд e сила $\mathbf{F}$ равна

$$\mathbf{F} = e\, (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \tag{15}$$

Выражение (15) впервые было получено Х. А. Лоренцем, родоначальником электронной теории строения вещества. Поэтому силу, действующую на заряд в электрическом поле, называют *силой Лоренца.*

Свойства силы Лоренца. Первое слагаемое в выражении (15) для силы Лоренца определяет силу, действующую на заряд со стороны электрического поля. Эта составляющая пропорциональна заряду e и не зависит от его скорости. Она направлена вдоль напряженности электрического поля $\mathbf{E}$.

Второе слагаемое в (15) дает силу, действующую на заряд со стороны магнитного поля. В отличие от электрической силы, она действует только на движущийся заряд и пропорциональна его скорости. Эта сила направлена не вдоль, а поперек вектора магнитной индукции $\mathbf{B}$, т. е. перпендикулярно магнитным силовым линиям.

Формула (15) имеет универсальный характер, она справедлива во всех случаях независимо от того, какими источниками создаются электрическое и магнитное поля. Она сохраняет свой вид и тогда, когда действующие на заряженную частицу электрическое и магнитное поля неоднородны в пространстве и произвольным образом изменяются со временем.

Движение заряженных частиц в электрическом и магнитном полях. При заданных полях $\mathbf{E}$ и $\mathbf{B}$ задача о движении заряженной частицы — это обычная задача классической механики о движении под действием известных сил.

Строго говоря, движущаяся с ускорением заряженная частица излучает электромагнитные волны и испытывает с их стороны ответное воздействие. Но во многих случаях этот эффект мал и им можно полностью пренебречь. Но даже и тогда задача остается очень сложной, если заданные внешние поля неоднородны. В однородных электрическом и магнитном полях движение заряженной частицы происходит достаточно просто и может быть изучено элементарными методами.

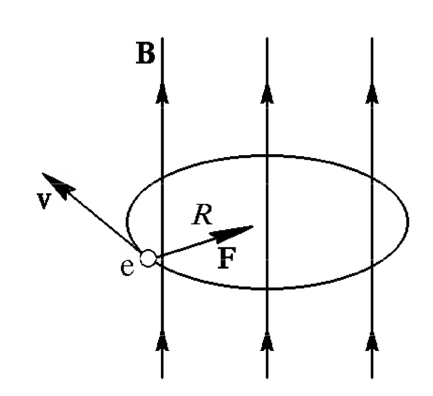


Рис. 105. Поперечное движение заряженной частицы в однородном магнитном поле

Движение заряженной частицы в однородном электрическом поле происходит совершенно аналогично движению материальной точки в однородном поле тяжести. Частица движется с постоянным по модулю и направлению ускорением, равным произведению удельного заряда частицы e/m на напряженность поля **E**. Траектория такого движения в общем случае представляет собой параболу. Именно так движутся электроны в пространстве между отклоняющими пластинами в вакуумной электронно-лучевой трубке осциллографа с электростатическим управлением.

Движение заряженной частицы в однородном магнитном поле под действием силы Лоренца $e\mathbf{v}\times\mathbf{B}$ происходит следующим образом. В плоскости, перпендикулярной индукции магнитного поля, частица равномерно обращается по окружности со скоростью **v** (рис. 105). Радиус R этой окружности пропорционален перпендикулярной магнитному полю составляющей скорости частицы $\mathbf{v}_\perp$, а частота обращения частицы ω_c от скорости не зависит и равна произведению удельного заряда частицы на индукцию магнитного поля. Если при этом частица имеет еще и составляющую скорости $\mathbf{v}_\parallel$ вдоль магнитного поля **B**, то на такое вращение накладывается равномерное движение вдоль поля, так что траектория результирующего движения представляет собой винтовую линию (рис. 106). Покажем это.

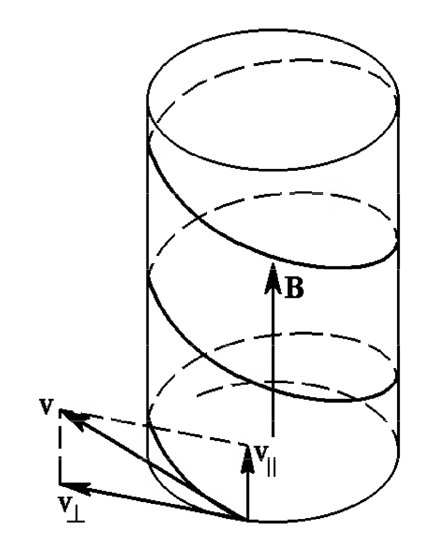


Рис. 106. В однородном магнитном поле частица движется по винтовой линии

Составляющая скорости частицы вдоль магнитного поля $\mathbf{v}_\parallel$ не меняется при движении. Составляющая скорости, перпендикулярная магнитному полю, $\mathbf{v}_\perp$ меняется только по направлению, так как действующая сила перпендикулярна скорости. Поэтому в проекции на плоскость, перпендикулярную магнитному полю, движение частицы происходит по окружности некоторого радиуса R с центростремительным ускорением $v_\perp/R$, обусловленным силой Лоренца. Записывая выраже-

ние для этой силы в виде $ev_\perp B$ и приравнивая ее в соответствии со вторым законом Ньютона произведению массы на ускорение, имеем

$$\frac{mv_\perp^2}{R} = ev_\perp B,$$

откуда

$$R = \frac{mv_\perp}{eB}. \qquad (16)$$

Частота обращения частицы $\omega_c = v_\perp/R$, как видно из (16), равна

$$\omega_c = eB/m. \qquad (17)$$

Циклотронная частота. Независимость частоты обращения частицы в магнитном поле от ее скорости и от радиуса круговой орбиты (а тем самым и от энергии) лежит в основе принципа действия циклотрона исторически первого и наиболее простого из циклических ускорителей заряженных частиц, широко применяемого и в наши дни в самых различных областях науки и техники. От названия этого прибора происходит термин «циклотронная частота» для частоты обращения заряженной частицы в магнитном поле, даваемой формулой (17).

Отклонение заряженных частиц поперечным магнитным полем используется также в *масс-спектрометрах* — приборах для точных измерений масс атомов и молекул, в установках для электромагнитного разделения изотопов. В телевизионных трубках с помощью магнитного поля производится строчная и кадровая развертка электронного луча по экрану.

Интересно отметить, что при небольшом разбросе значений продольной составляющей скорости частиц движение в однородном магнитном поле обладает замечательным свойством фокусировки: выходящий из одной точки и направленный вдоль поля слегка расхо-

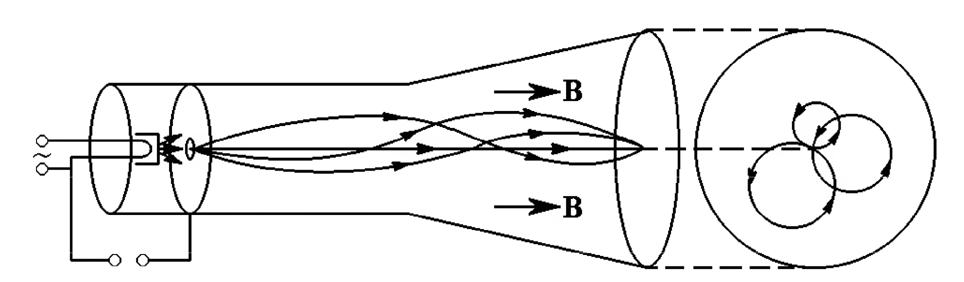


Рис. 107. Фокусировка пучка электронов продольным магнитным полем

дящийся пучок заряженных частиц на некотором расстоянии вновь собирается в одну точку. Это свойство продольной фокусировки было использовано в 1922 г. Бушем для точного измерения удельного заряда электрона.

Разберем опыт Буша подробно. Рассмотрим устройство, изображенное на рис. 107: электронно-лучевая трубка без управляющих пластин помещена внутрь соленоида, создающего однородное магнитное поле, направленное вдоль оси трубки. В отсутствие магнитного

поля электроны летят прямолинейно и образуют на флуоресцирующем экране широкое светящееся пятно. Регулируя ток в соленоиде и тем самым изменяя индукцию магнитного поля, можно добиться того, что электроны соберутся на экране в яркую светящуюся точку.

Выясним причину фокусировки электронов.

Из электронной пушки электроны вылетают с приблизительно одинаковыми по модулю скоростями, но с некоторым разбросом по направлению. Скорость электрона v можно определить с помощью закона сохранения энергии:

$$mv^2/2 = eU, \tag{18}$$

где e — абсолютная величина заряда электрона, а U — ускоряющее напряжение между катодом и ускоряющим анодом электронной пушки.

На электрон, летящий вдоль магнитного поля, сила Лоренца не действует. Поэтому электрон, вылетевший из пушки вдоль оси трубки, движется прямолинейно и попадает в центр экрана. Если же электрон вылетел под некоторым углом α к оси трубки и, следовательно, у него есть составляющая начальной скорости, перпендикулярная магнитному полю, то, как мы видели, траектория электрона представляет собой винтовую линию. Угловая скорость и, следовательно, период обращения не зависят от скорости. Поэтому электроны, вылетевшие из пушки под разными углами, совершают полный оборот за одно и то же время.

Поскольку электроны вылетают из пушки под малыми углами к оси трубки, то все они движутся вдоль оси трубки практически с одной и той же скоростью $v_{\parallel} \approx v$ и за время одного оборота $T = 2\pi/\omega_c$ проходят вдоль оси трубки одно и то же расстояние L:

$$L = 2\pi \frac{v}{\omega_c}. \tag{19}$$

Это означает, что все винтовые линии, по которым движутся электроны, пересекают ось трубки практически в одной и той же точке, отстоящей на расстояние L от пушки. Такая же фокусировка происходит и после совершения электронами двух, трех и т. д. оборотов, т. е. на расстояниях $2L$, $3L$ и т. д. от пушки. Если положение одной из этих точек совпадает с плоскостью экрана, то пятно на экране сожмется в яркую точку. Расстояние от электронной пушки до экрана определяется конструкцией трубки и не изменяется во время опыта, но мы можем изменять шаг винтовой линии L, регулируя величину индукции магнитного поля B или ускоряющее напряжение U.

Подставляя скорость электронов v из (18) и угловую скорость вращения ω_c из (17) в формулу (19), получаем соотношение

$$\frac{e}{m} = 8\pi^2 \frac{U}{L^2B^2}. \tag{20}$$

Если при неизменном ускоряющем напряжении U мы добьемся фокусировки пучка электронов, постепенно увеличивая индукцию магнитного поля B от нуля, то формула (20) может быть использована для вычисления отношения e/m. Для этого в правую часть нужно подставить значения U и B, при которых произошла фокусировка, а в качестве L взять расстояние от электронной пушки до экрана трубки.

Если теперь продолжать увеличивать индукцию магнитного поля, то пятно на экране будет сначала расплываться, а затем снова сожмется в яркую точку. Ясно, что теперь электроны успевают совершить два полных оборота по винтовой линии до того, как попадают на экран. Для нахождения e/m в формулу (20) в качестве L в этом случае следует подставлять половину расстояния от пушки до экрана.

Отметим, что достигнутая этим методом погрешность измерения удельного заряда электрона составляет величину порядка десятой доли процента.

Явление фокусировки пучка электронов продольным магнитным полем используется во многих электронно-оптических приборах.

- Покажите, что при указанном на рис. 101 расположении рамки с током в магнитном поле действующий на нее вращающий момент максимален.
- Покажите, что векторная форма (5) выражения для силы Ампера соответствует правилу левой руки.
- Покажите, что параллельные токи притягиваются или отталкиваются в зависимости от того, текут они в одну или в противоположные стороны, а скрещенные токи стремятся расположиться параллельно друг другу.
- Рассмотрите вопрос о том, как действует магнитное поле, создаваемое проходящим по соленоиду током, на сам этот соленоид: стремятся ли действующие на его витки силы растянуть или сжать соленоид в продольном направлении (вдоль его оси)? в поперечном направлении?
- Как из определения единицы силы тока — ампера — установить числовое значение магнитной постоянной μ_0?
- Входит ли в выражение (10) для работы в магнитном поле изменение магнитного потока, создаваемого током в самом движущемся проводе? в контуре, в который он включен?
- Проверьте соответствие порядка сомножителей в векторном произведении $\mathbf{F} = e\,\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ правилу левой руки для силы, действующей на проводник с током в магнитном поле.
- Применима ли формула (15) для силы Лоренца в случае переменных во времени электрического и магнитного полей?
- Может ли сила, действующая на заряженную частицу в магнитном поле, изменить ее энергию?
- Объясните принцип фокусировки расходящегося пучка электронов в продольном магнитном поле.

- Как должна быть направлена скорость заряженной частицы в скрещенных электрическом и магнитном полях и каким должен быть ее модуль, чтобы частица двигалась прямолинейно?
- При изучении движения заряженных частиц в электрическом и магнитном полях удобно использовать метод физического подобия, изложенный в книге 1 данного курса. Примените метод подобия для получения ответа на следующий вопрос. Ионы из источника попадают в ускоряющее электрическое поле без начальной скорости и летят к детектору. Во сколько раз отличается время пролета до детектора для ионов, различающихся в два раза по заряду и в полтора раза по массе?

III. ЭЛЕКТРОМАГНИТНОЕ ПОЛЕ

Тесная связь между электричеством и магнетизмом ярко обнаруживает себя в явлении электромагнитной индукции: изменяющееся магнитное поле может вызывать ток в проводнике, так как при изменении магнитного поля возникает электрическое поле. Поэтому в физике говорят о едином электромагнитном поле, которое включает в себя взаимосвязанные электрическое и магнитное поля.

§ 17. Явление электромагнитной индукции

В предыдущей главе мы видели, что электрический ток создает вокруг себя магнитное поле. Попытки обнаружить обратное явление, когда магнитное поле создавало бы ток, терпели неудачу до тех пор, пока в 1831 г. Фарадей не обнаружил, что электрический ток порождается не самим магнитным полем, а его изменением. Открытое Фарадеем явление получило название *электромагнитной индукции.*

Индукционный ток. Рассмотрим некоторые простые опыты, иллюстрирующие существование явления электромагнитной индукции, в

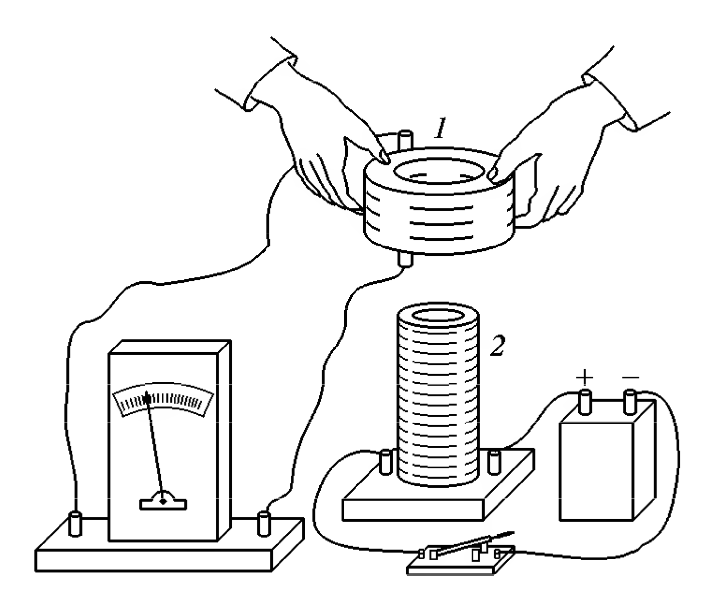


Рис. 108. При движении катушки *1* в магнитном поле катушки *2* появляется ток в цепи катушки *1*

которых можно подметить основные его закономерности. Если надеть проволочную катушку *1* (рис. 108), подключенную к чувствительному гальванометру, на другую катушку *2*, через которую идет ток от

источника, то гальванометр покажет отсутствие тока в катушке *1*, пока она неподвижна и ток в катушке *2* не меняется. Однако в моменты замыкания или размыкания ключа или при изменении тока в катушке *2* с помощью реостата или при любом относительном движении катушек *1* и *2* гальванометр фиксирует появление тока в катушке *1*. Этот ток называют *индукционным*.

Легко заметить, что отклонение стрелки гальванометра при размыкании ключа происходит в сторону, противоположную отклонению при его замыкании. Отклонение стрелки при увеличении тока в цепи катушки *2* противоположно отклонению при уменьшении тока. Наконец, при надевании катушки *1* на катушку *2* направление индукционного тока противоположно его направлению при снимании катушки *1*.

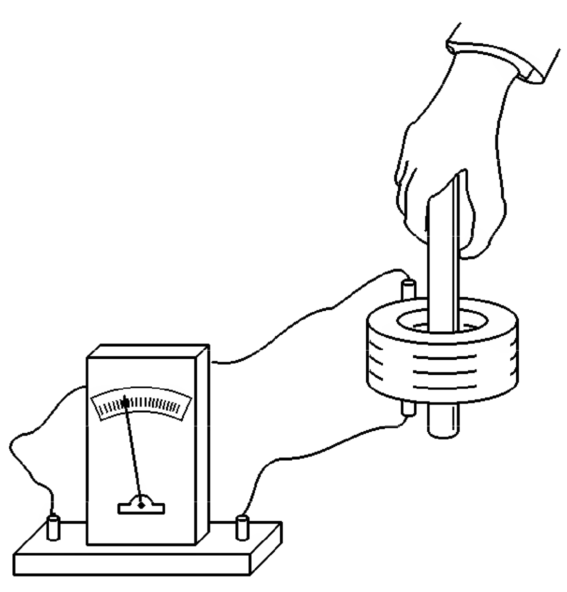


Рис. 109. Возбуждение индукционного тока движением магнита

Опыты Фарадея наглядно свидетельствуют о том, что причина появления индукционного тока заключается в изменении магнитного поля. Каким способом создается это изменение, безразлично. Например, изменяющееся магнитное поле можно создать движением постоянного магнита. Стрелка гальванометра отклоняется в одну сторону, когда магнит вдвигают в катушку, и в противоположную — когда его выдвигают из катушки (рис. 109). Изменение магнитного поля в катушке *1*, надетой на катушку *2*, можно вызвать не только уменьшением тока в катушке

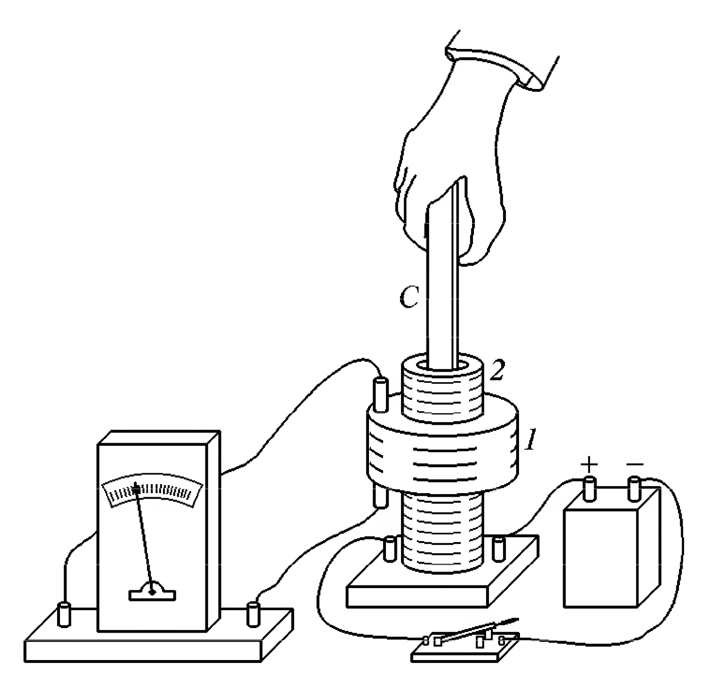


Рис. 110. Возбуждение индукционного тока движением ненамагниченного железного сердечника

2, но и вдвиганием или выдвиганием ненамагниченного железного сердечника (рис. 110).

Фарадей дал наглядное объяснение своим опытам, используя представление о магнитных силовых линиях. Он заключил, что индукционный ток возникает в проводнике в том случае, если образованный этим проводником контур или какая-либо его часть пересекает линии магнитной индукции.

Закон Ленца. Э. Х. Ленц установил важный закон, позволяющий во всех случаях предсказать направление индукционного тока. Согласно *закону Ленца* направление индукционного тока всегда таково, что создаваемое им магнитное поле препятствует изменению магнитного потока, вызывающему индукционный ток.

Этот закон можно проиллюстрировать на очень простом опыте, показанном на рис. 111. При вдвигании постоянного магнита в раз-

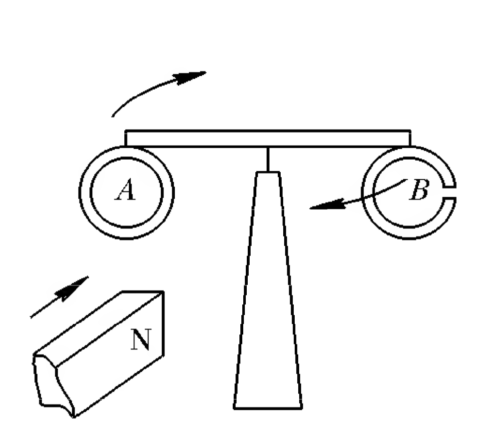



Рис. 111. Иллюстрация закона Ленца

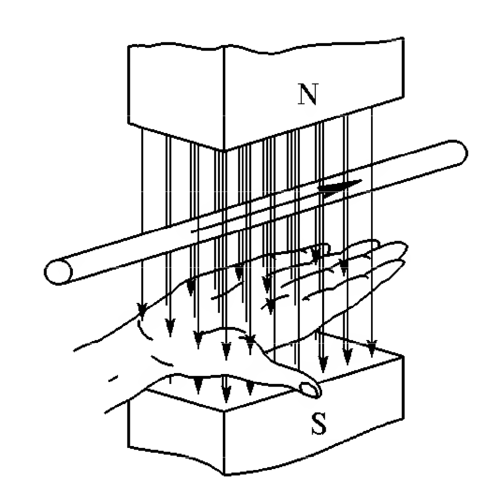


Рис. 112. Правило правой руки

резанное металлическое кольцо *B* никакого взаимодействия не наблюдается и коромысло остается на месте. При вдвигании магнита в сплошное кольцо *A* оно отталкивается от магнита и коромысло поворачивается на острие вокруг вертикальной оси; при выдвигании магнита сплошное кольцо стремится следовать за ним.

Практически для определения направления индукционного тока в проводнике, пересекающем магнитные силовые линии, удобно пользоваться *правилом правой руки* (рис. 112): если правую руку расположить так, чтобы линии магнитной индукции входили в ладонь, а большой отставленный в сторону палец показывал направление движения проводника, то четыре выпрямленных пальца укажут направление индукционного тока.

ЭДС индукции. Появление индукционного тока в замкнутом контуре при изменении пронизывающего этот контур магнитного потока свидетельствует о возникновении в нем некоторой электродвижущей силы, называемой *ЭДС индукции*. Опыт показывает, что ЭДС индукции не зависит от материала, из которого сделан проводник, в частности, от его сопротивления.

Закон электромагнитной индукции. Во всех описанных выше опытах отброс стрелки гальванометра, свидетельствующий о появлении индукционного тока, оказывается тем больше, чем быстрее происходит изменение магнитного поля. Анализируя результаты опытов Фарадея, Максвелл установил, что во всех случаях ЭДС электромагнитной индукции пропорциональна скорости изменения магнитного потока через поверхность, ограниченную контуром:

$$\mathscr{E}_i = -k\frac{d\Phi}{dt}. \qquad (1)$$

Коэффициент k зависит от выбора единиц. В СИ закон электромагнитной индукции используют для введения единицы магнитного потока — вебера, с которой мы уже встречались в § 15. Эту единицу выбирают так, чтобы коэффициент k в (1) был равен единице.

Знак минус в формуле (1) соответствует закону Ленца. Отметим, что закон Ленца, как и сам закон электромагнитной индукции (1), можно рассматривать как следствие закона сохранения энергии. Исторически закономерности явления электромагнитной индукции были установлены еще до открытия закона сохранения энергии и послужили его экспериментальным подтверждением, наряду со многими другими эмпирически найденными закономерностями разных явлений.

Открытие электромагнитной индукции имело огромное научное и техническое значение. Оно в значительной степени определило развитие цивилизации в XIX веке. Научное значение этого открытия в том, что оно окончательно установило взаимосвязь между электрическими и магнитными явлениями. Практическое его значение в том, что все промышленные способы получения электроэнергии основаны на электромагнитной индукции.

Природа сторонних сил. Вихревое электрическое поле. Возникновение электродвижущей силы индукции может быть обусловлено сторонними силами разной физической природы. В неподвижном контуре ЭДС индукции обусловлена вихревым электрическим полем, возникающим при изменении магнитного потока через поверхность, ограниченную контуром.

Изменение магнитного потока может быть вызвано как движением магнита, создающего поле, так и изменением магнитного поля путем изменения тока в электромагните. Первая возможность реализуется в промышленных генераторах, где вращающийся электромагнит возбуждает ток в обмотках неподвижного статора. Вторая возможность реализуется в трансформаторах, где изменение тока в первичной обмотке вызывает изменение магнитного потока и, следовательно, появление вихревого электрического поля.

В отличие от потенциального электростатического поля, создаваемого неподвижными электрическими зарядами, вихревое электрическое поле, возникающее при изменении магнитного поля, обладает тем свойством, что работа сил этого поля на замкнутом пу-

ти не равна нулю. Именно этой работой и определяется ЭДС индукции в замкнутом контуре.

Подчеркнем, что вихревое электрическое поле при изменении магнитного поля существует независимо от того, имеется ли в этом месте замкнутый проводящий контур. Сам проводящий контур является лишь индикатором, обнаруживающим наличие вихревого электрического поля.

Сила Лоренца как причина сторонней силы. Иную физическую природу имеет вызывающая индукционный ток сторонняя сила, возникающая при движении проводника в неизменном магнитном поле. Вихревое электрическое поле в этом случае отсутствует, а сторонняя сила обусловлена силой Лоренца, с которой магнитное поле действует на движущиеся вместе с проводником электрические заряды. На таком принципе основано действие электрических генераторов небольшой мощности, где индукционный ток возбуждается в обмотке ротора, вращающегося в неподвижном магнитном поле. В отсутствие проводника, содержащего электрические заряды, никаких сторонних сил, а следовательно, и ЭДС индукции нет.

ЭДС индукции и работа силы Лоренца. Нетрудно убедиться, что ЭДС индукции, вычисляемая по общему закону (1), совпадает с работой сторонней силы при перемещении единичного заряда по замкнутому контуру. Будем считать, что прямоугольная металлическая рамка *abcd* движется с постоянной скоростью v, как показано на рис. 113. Сторона *ab* пересекает силовые линии однородного магнитного поля **B**, существующего между полюсами магнита. ЭДС индукции в контуре *abcd* может быть вычислена с помощью закона электромагнитной индукции (1). Учитывая, что при движении рамки в направлении, указанном на рис. 113, пронизывающий рамку магнитный поток убывает, имеем

$$\Delta\Phi = -Blv\,\Delta t,$$

откуда согласно (1)

$$\mathscr{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = Blv. \qquad (2)$$

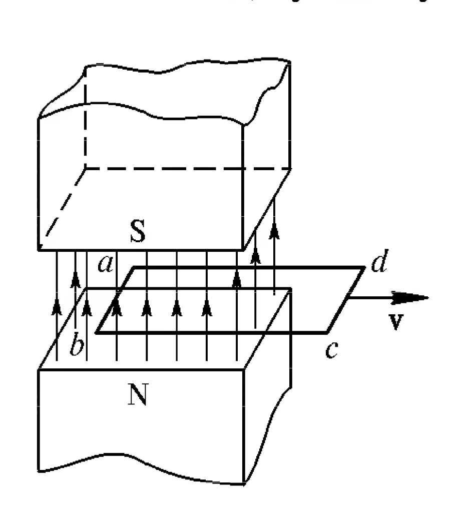


Рис. 113. Движение проводящей рамки в магнитном поле

Вычислим теперь эту же ЭДС индукции как работу сторонних сил при перемещении единичного заряда по контуру *abcd*. Рассмотрим силы, действующие на проводник *ab* при его равномерном перемещении в магнитном поле. При движении проводника со скоростью **v** заряды в нем движутся вдоль проводника с некоторой постоянной скоростью **u** (скоростью дрейфа). В результате в лабораторной системе отсчета заряды переме-

щаются со скоростью $\mathbf{V} = \mathbf{v} + \mathbf{u}$ (рис. 114), и на каждый из них действует сила Лоренца

$$F_{\text{Л}} = eVB.$$

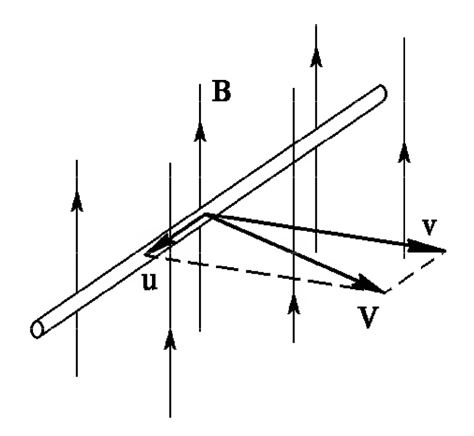


Рис. 114. Скорость носителя заряда в движущемся проводнике

Эта сила перпендикулярна вектору $\mathbf{V}$. Разложим ее на две составляющие (рис. 115*а*). Перпендикулярная проводнику составляющая $\mathbf{F}_{\text{A}}$, если ее просуммировать по всем носителям заряда на участке *ab* проводника, даст действующую на проводник с током силу Ампера. При равномерном движении проводника она уравновешена внешней силой $\mathbf{F}$, приводящей проводник в движение. Направленная вдоль провода составляющая $\mathbf{F}_{\text{стор}}$ силы Лоренца — это и есть сторонняя сила, заставляющая заряды двигаться по проводнику, т. е. создающая индукционный ток.

Работа силы Лоренца равна нулю, поскольку эта сила перпендикулярна скорости зарядов $\mathbf{V}$. Это значит, что равна нулю сумма работ силы Ампера и сторонней силы:

$$A_{\text{A}} + A_{\text{стор}} = 0, \quad \text{т. е.} \quad A_{\text{стор}} = -A_{\text{A}}.$$

Но работа силы Ампера с точностью до знака равна работе внешней силы: $A_{\text{внеш}} = -A_{\text{A}}$. Отсюда следует, что работа сторонних сил

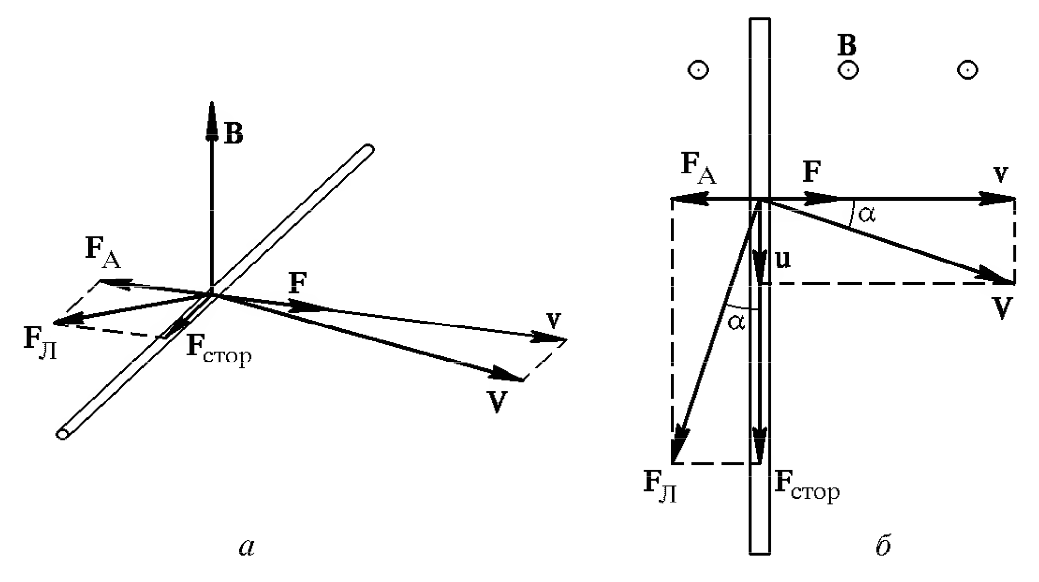


Рис. 115. Силы, действующие на движущийся в магнитном поле проводник в расчете на один носитель заряда (*а*); вид сверху (*б*)

при движении зарядов в контуре равна работе внешних сил, приводящих этот контур в движение. Другими словами, электрическая энергия индукционного тока возникает благодаря механической работе, совершаемой внешними силами.

Сторонняя сила $\mathbf{F}_{\text{стор}}$ совершает работу только на участке ab длины l:

$$A_{\text{стор}} = F_{\text{стор}} l = F_{\text{Л}} \cos\alpha \cdot l = eVBl\cos\alpha,$$

где α — угол между векторами $\mathbf{v}$ и $\mathbf{V}$, а, следовательно, $V\cos\alpha = v$. В результате получаем окончательно для работы сторонних сил:

$$A_{\text{стор}} = eBlv. \qquad (3)$$

Отношение этой работы к заряду e представляет собой электродвижущую силу индукции $\mathscr{E}$. Таким образом, $\mathscr{E} = Blv$, что совпадает с (2).

Отметим, что ЭДС индукции в такой рамке возникает лишь тогда, когда только часть рамки находится в однородном магнитном поле (как показано на рис. 113) или когда магнитное поле неоднородно. Если рамка целиком находится в однородном поле, то при ее поступательном движении магнитный поток не меняется и ЭДС индукции равна нулю: хотя на отдельных участках рамки сторонние силы действуют, работа этих сил вдоль всей рамки равна нулю.

Несмотря на разную физическую природу сторонних сил в рассмотренных случаях, закон электромагнитной индукции (1), согласно которому ЭДС индукции в контуре равна взятой с обратным знаком скорости изменения магнитного потока, справедлив и в случае, когда поток меняется за счет изменения магнитного поля, и в случае, когда поток меняется за счет движения контура в неизменном магнитном поле, и в случае, когда происходит и то и другое одновременно. Эти возможности — поле меняется или контур движется — неразличимы в формулировке закона индукции. Рассмотрим эти возможности с точки зрения сторонних сил, действующих на заряды.

Сила, действующая на заряд q в электрическом поле напряженности $\mathbf{E}$, равна $q\mathbf{E}$ независимо от того, является поле потенциальным или вихревым, т. е. создается электрическими зарядами или магнитным полем. Сила Лоренца, действующая на движущийся со скоростью $\mathbf{v}$ заряд q в магнитном поле индукции $\mathbf{B}$, определяется векторным произведением скорости $\mathbf{v}$ и индукции $\mathbf{B}$:

$$\mathbf{F} = q\,\mathbf{v}\times\mathbf{B}. \qquad (4)$$

Эта сила перпендикулярна как скорости заряда, так и индукции магнитного поля. Полная сила, действующая на заряд q, равна

$$\mathbf{F} = q\,(\mathbf{E} + \mathbf{v}\times\mathbf{B}). \qquad (5)$$

В движущихся в магнитном поле проводниках сила возникает за счет $\mathbf{v}$. Вихревое электрическое поле возникает, если где-либо меняется магнитное поле. Эти эффекты независимы и могут проявляться и порознь, и одновременно. Но в любом случае действие этих сторонних сил создает в контуре электродвижущую силу, значение которой равно скорости изменения магнитного потока.

В этом смысле формулу (1) можно назвать правилом для нахождения ЭДС индукции, ибо, как мы видели, эта формула не вскрывает физической причины возникновения ЭДС — причина может быть разной в разных случаях. Правило потока (1) дает только значение ЭДС, механизм ее возникновения должен устанавливаться независимо.

Исключения из правила потока. Но из этого правила бывают и исключения! Понять эти исключения можно, лишь зная истинную причину возникновения сторонних сил. Яркий пример — известный еще Фарадею униполярный индуктор (рис. 116). Металлический контур *ABCD* вращается вокруг постоянного магнита цилиндрической формы, образуя с магнитом замкнутую электрическую цепь при помощи двух скользящих контактов, один из которых (*A*) касается оси магнита, а другой (*D*) — самого магнита в нейтральной точке. Магнитный поток через контур *ABCD*, замыкаемый частью магнита, равен нулю в любой момент времени, так как силовые линии магнитного поля лежат в плоскости контура. Изменение магнитного потока при вращении контура также равно нулю, а индукционный ток есть!

Если отчетливо представить себе, что причиной возникновения ЭДС в таком устройстве является сила Лоренца, действующая на

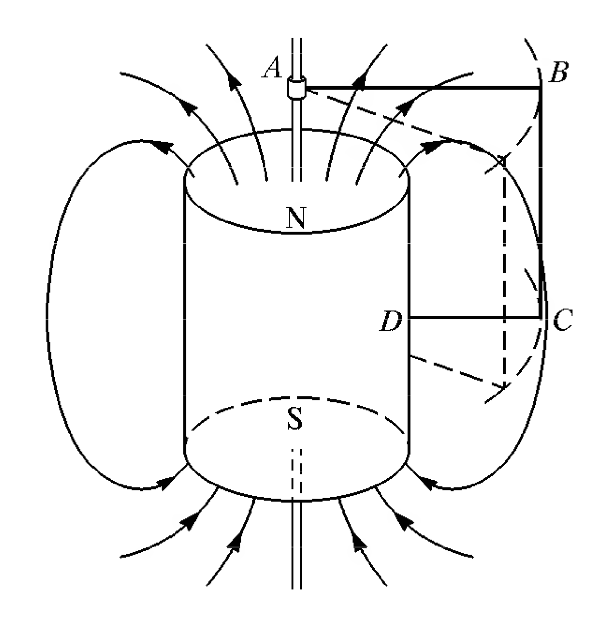


Рис. 116. Униполярный индуктор

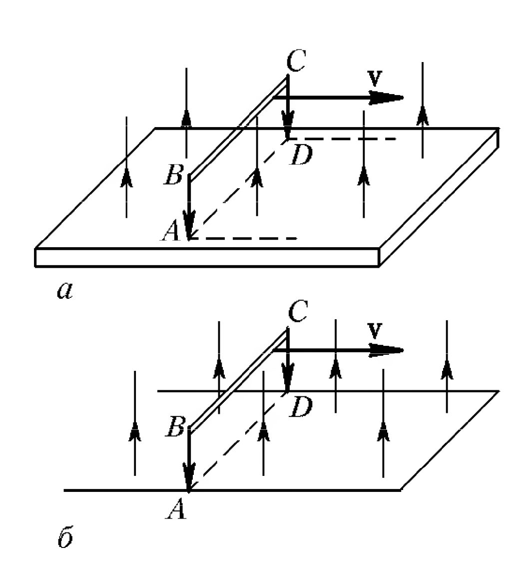


Рис. 117. К объяснению действия униполярного индуктора

электроны в движущемся контуре, то легко сообразить, что ЭДС действительно должна возникать.

Для большей наглядности рассмотрим видоизмененный вариант этого опыта, когда контур *ABCD* движется поступательно вдоль проводящей ленты, помещенной в однородное магнитное поле (рис. 117*а*). Здесь также магнитный поток через контур и его изменение равны нулю, но на участке *BC* на электроны действует сила Лоренца, заставляющая их двигаться вдоль контура. Возникающая

ЭДС $\mathscr{E} = Blv$ будет такой же, как и в устройстве, показанном на рис. 117*б*, где вместо ленты имеются проводящие рельсы, соединенные в одном месте.

А вот в устройстве, показанном на рис. 118, наоборот, магнитный поток изменяется, а ЭДС индукции отсутствует. Магнитное поле направлено перпендикулярно поверхности металлического листа. При вытягивании контактной пробки значительно увеличивается площадь контура и, следовательно, охватываемый им магнитный поток. Если бы ЭДС индукции здесь определялась формулой $\mathscr{E} = -d\Phi/dt$, то должен был возникнуть значительный индукционный ток, сопровождающийся выделением джоулевой теплоты. Эта теплота выделилась бы за счет работы сторонней силы. Однако работа сторонней силы здесь ничтожно мала. В самом деле, замыкающая контур коробка играет роль стороны ab рамки (см. рис. 113) в разобранном выше примере. Работа $A_{\text{стор}}$, определяемая формулой (3), стремится к нулю при уменьшении ширины пробки l.

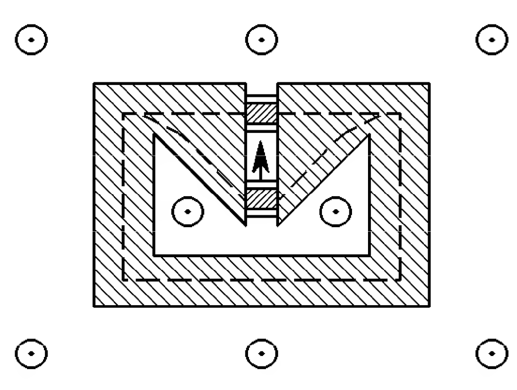


Рис. 118. При перемещении пробки магнитный поток изменяется, а ЭДС индукции отсутствует

Явление самоиндукции. Важным частным случаем электромагнитной индукции является *самоиндукция*, когда изменяющийся магнитный поток, вызывающий ЭДС индукции, создается током в самом рассматриваемом контуре. Согласно закону Ленца явление самоиндукции препятствует изменению тока в контуре. Поэтому при замыкании цепи, содержащей источник постоянного тока, ток достигает своего установившегося значения не сразу, а при размыкании цепи не может мгновенно исчезнуть.

Рассмотрим, от чего зависит ЭДС самоиндукции. Магнитное поле, создаваемое током в контуре или катушке неизменных размеров и формы, в любой точке пропорционально силе тока I. Поэтому и магнитный поток Φ, пронизывающий контур, пропорционален току:

$$\Phi = LI. \tag{6}$$

Индуктивность. Коэффициент пропорциональности L называется *индуктивностью контура* или *коэффициентом самоиндукции*. Используя закон электромагнитной индукции (1), для ЭДС самоиндукции получаем выражение

$$\mathscr{E} = -L\,\frac{dI}{dt}. \tag{7}$$

При неизменных форме и размерах контура ЭДС самоиндукции пропорциональна скорости изменения тока в контуре. Индуктивность контура L зависит от его размеров и формы, а также от магнитных свойств среды, в которую он помещен.

Наблюдение самоиндукции. Явление самоиндукции легко наблюдать в опыте, схема которого приведена на рис. 119*а*. Две одинаковые лампочки подключены к источнику тока, одна — через обычный реостат R, а другая — через катушку большой индуктивности, называемую *дросселем*. При замыкании ключа первая лампочка $Л_1$ вспыхивает мгновенно, а вторая $Л_2$ — с заметным опозданием. Так происходит потому, что в дросселе в начальный момент возникает большая ЭДС самоиндукции, которая в соответствии с законом Ленца препятствует нарастанию тока в этой ветви цепи.

Явление самоиндукции обнаруживает себя не только при замыкании, но и при размыкании цепи. В этом можно убедиться с помощью цепи, схема которой приведена на рис. 119*б*. При замкнутом ключе ток батареи разветвляется: часть его проходит через грубый гальванометр, нуль которого находится посредине шкалы, а часть — через

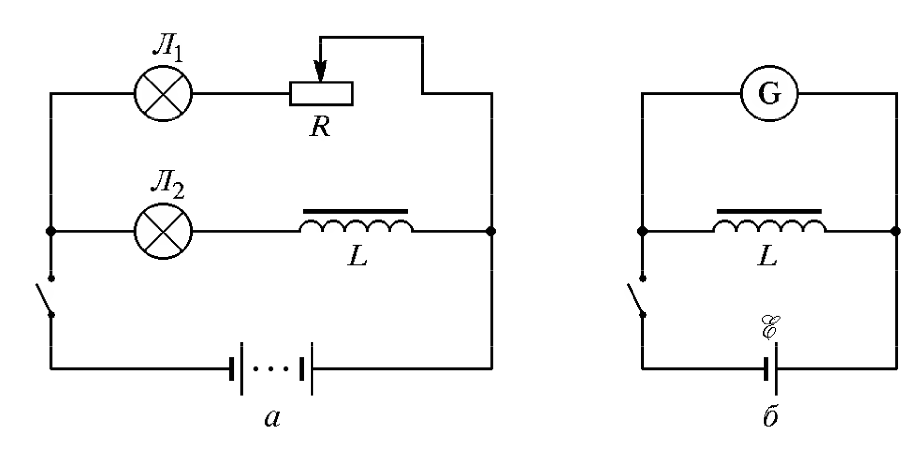


Рис. 119. Схемы опытов для наблюдения самоиндукции при замыкании (*а*) и при размыкании (*б*) цепи

катушку индуктивности. При размыкании ключа магнитный поток в катушке начинает убывать, и возникает ЭДС самоиндукции, препятствующая спаданию тока через катушку. Но батарея уже отключена, поэтому ток вынужден идти через гальванометр, причем в направлении, противоположном первоначальному. Это и покажет гальванометр, стрелка которого отклонится в противоположную сторону.

Отметим, что ЭДС самоиндукции может значительно превышать ЭДС источника. Этим и объясняется опасность резкого отключения от силовой сети мощных электродвигателей, обмотки которых обладают большой индуктивностью. Их отключают с помощью реостатов, плавно уменьшая силу тока.

Самоиндукция — аналог инерции. Явление самоиндукции в определенном смысле аналогично явлению инерции в механике. Подобно тому, как инерция приводит к постепенному изменению скорости тела даже при мгновенном приложении силы, самоиндукция не дает току мгновенно изменять свое значение в электрической цепи. Поэтому индуктивность катушки L представляет собой аналог массы m, служащей мерой инертности.

Единица индуктивности. В СИ индуктивность измеряют в генри (Гн). Индуктивность контура равна 1 Гн, если при скорости изменения силы тока в нем, равной 1 А/с, возникает ЭДС самоиндукции 1 В:

$$1\ \text{Гн} = \frac{1\ \text{В}}{1\ \text{А/с}} = 1\ \frac{\text{В} \cdot \text{с}}{\text{А}}.$$

Индуктивность соленоида. Для примера найдем индуктивность длинного соленоида, имеющего N витков, площадь сечения S и длину l. Индукция магнитного поля внутри такого соленоида согласно формуле (9) § 15 равна

$$B = \mu_0 \frac{N}{l} I. \quad (8)$$

Магнитный поток Φ_1 через поперечное сечение соленоида S равен

$$\Phi_1 = BS = \mu_0 \frac{N}{l} SI,$$

а суммарный поток Φ через все N витков будет в N раз больше:

$$\Phi = N\Phi_1 = \mu_0 \frac{N^2}{l} SI. \quad (9)$$

Сравнивая (9) и (6), получаем

$$L = \mu_0 \frac{N^2 S}{l}. \quad (10)$$

Вводя число витков на единицу длины $n = N/l$, этому выражению можно придать вид

$$L = \mu_0 n^2 V,$$

где $V = Sl$ — объем соленоида, внутри которого в основном и сосредоточено магнитное поле.

Вихревые токи. В технике явление электромагнитной индукции, наряду с широким спектром полезных применений, иногда обнаруживает себя и нежелательным образом. Примером могут служить так называемые *вихревые токи*, или *токи Фуко*. Это замкнутые электрические токи в массивных сплошных проводниках, возникающие либо при изменении пронизывающего их магнитного поля, либо при движении проводящего тела в магнитном поле. Вихревые токи замыкаются непосредственно в проводящей массе, образуя вихреобразные контуры.

Согласно закону Ленца, создаваемое вихревыми токами магнитное поле направлено так, чтобы компенсировать изменение магнитного потока, их порождающее. В результате на движущийся в магнитном поле массивный проводник действует тормозящая сила, направленная против движения и пропорциональная скорости.

Проявление токов Фуко можно продемонстрировать в следующем простом опыте (рис. 120*а*). В зазоре между полюсами сильного

электромагнита (*1* и *2*) качается маятник, на конце которого закреплена сплошная медная пластина (*M*). При включении электромагнита колебания маятника очень быстро прекращаются. Если заменить сплошную пластину такой же по размерам пластиной с поперечными разрезами (рис. 120*б*), то включение электромагнита почти не сказывается на затухании колебаний.

Вихревые токи вызывают не только появление механических сил, но и выделение джоулевой теплоты. Во многих электротехнических устройствах для борьбы с этим магнитопроводы (сердечники трансформаторов, якори электрических машин) набирают из отдельных изолированных друг от друга железных пластин.

В сверхпроводниках индукционные токи возникают не в толще, а в тонком приповерхностном слое. Так происходит потому, что магнитное поле не проникает в глубь сверхпроводника (эффект Мейсснера). В сверхпроводниках индукционные токи не затухают. Их проявление демонстрируется в эффектном опыте, когда неболь-

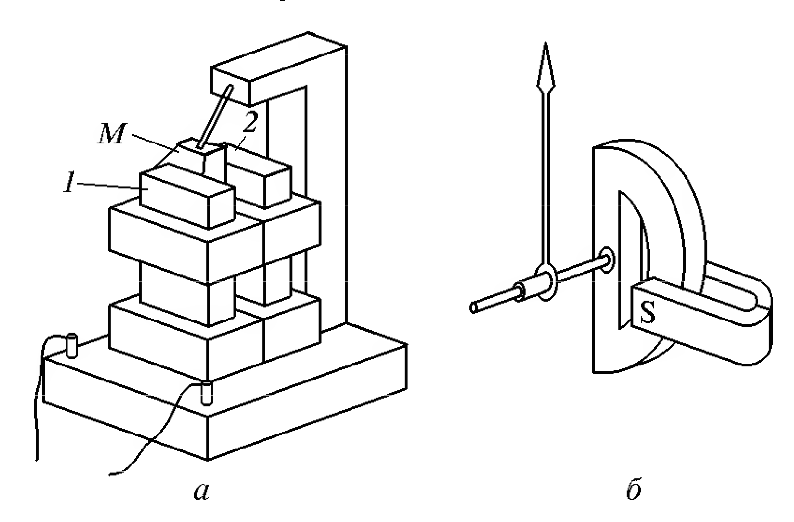


Рис. 120. Демонстрация токов Фуко (*а*) и их использование для демпфирования колебаний стрелки электроизмерительных приборов (*б*)

шой постоянный магнит, подобно гробу Магомета, без всякой опоры висит над охлаждаемой жидким азотом таблеткой из сверхпроводящей керамики, относящейся к так называемым высокотемпературным сверхпроводникам.

- Покажите, что в каждом из изображенных на рис. 108—110 опытов возникновение индукционного тока связано с пересечением катушки магнитными силовыми линиями, в результате чего происходит изменение числа силовых линий, охватываемых контуром («сцепленных» с контуром).

- Покажите, что в соответствии с законом Ленца отклонения стрелки гальванометра в опытах на рис. 108—110 действительно должны происходить в противоположные стороны при прямом и обратном действиях, как было указано в тексте.

- Объясните результаты опыта по вдвиганию магнита в сплошное и разрезанное кольца, укрепленные на поворачивающемся коромысле (рис. 111).

- Покажите, что правило правой руки для определения направления индукционного тока в движущемся проводнике согласуется с законом Ленца.
- Объясните качественно, как закон Ленца связан с законом сохранения энергии.
- Что можно сказать о физической природе сторонних сил в явлении электромагнитной индукции? Сказывается ли она на формулировке закона электромагнитной индукции (1)?
- Причина возбуждения индукционного тока в обмотках электрогенератора — это сила Лоренца. Но она направлена перпендикулярно скорости зарядов и работы не совершает. Каким же образом в электрогенераторе происходит превращение механической энергии в электрическую?
- Как объяснить возникновение индукционного тока в замкнутом контуре в тех случаях, когда сцепленный с контуром магнитный поток не меняется, например в униполярном индукторе?
- Возможны ли случаи, когда магнитный поток изменяется, а ЭДС индукции отсутствует?
- В чем заключается явление самоиндукции?
- Покажите, что при замыкании цепи, содержащей катушку индуктивности, действие ЭДС самоиндукции приводит к замедлению нарастания тока.
- Поясните качественно, почему ЭДС самоиндукции катушки пропорциональна квадрату числа витков.
- Если надеть медное или алюминиевое металлическое кольцо на сердечник электромагнита, то при включении электромагнита кольцо буквально «выстреливает» с сердечника. Объясните действие такой «электромагнитной пушки».

§ 18. Электрические машины постоянного тока

Как уже отмечалось, принцип действия электродвигателей основан на использовании силы Ампера, действующей на проводник с током в магнитном поле. Однако при работе электродвигателя принципиальную роль играет явление самоиндукции в его обмотках.

Модель электрической машины. Рассмотрим упрощенную линейную модель электрической машины (рис. 121): проводящий контур с включенным в него источником тока с ЭДС $\mathscr{E}$ помещается в однородное магнитное поле. Подвижная часть контура — стержень AC — может без трения скользить по рельсам.

Обозначим через I силу тока в контуре. На подвижную часть контура AC действует сила Ампера $F_A = IBl$, направленная, как показано на рисунке. Сила Ампера не зависит от того, покоится стержень AC или движется. Если мы хотим, чтобы стержень двигался

равномерно, необходимо приложить к нему внешнюю силу F, которая в любой момент уравновешивала бы силу Ампера.

Пусть за промежуток времени Δt стержень переместился на расстояние Δx в направлении действия силы Ампера. Напишем уравнение баланса энергии. За время Δt источник совершил работу $\mathscr{E} I\,\Delta t$. При этом во всех проводниках выделилась джоулева теплота $I^2 R\,\Delta t$, где R — полное сопротивление цепи. Кроме того, совершила работу сила Ампера:

$$\Delta A = F_{\text{A}}\,\Delta x = IBl\,\Delta x = IB\,\Delta S = I\,\Delta\Phi. \tag{1}$$

Как совершение этой механической работы, так и выделение теплоты происходит за счет действия источника тока. На основании закона сохранения энергии совершенная источником работа равна сумме выделившейся теплоты и работы силы Ампера:

$$\mathscr{E} I\,\Delta t = I^2 R\,\Delta t + I\,\Delta\Phi, \tag{2}$$

откуда, переходя к пределу $\Delta t \to 0$, для силы тока I получаем

$$I = \frac{\mathscr{E} - d\Phi/dt}{R}. \tag{3}$$

Сопоставляя это выражение с законом Ома для полной цепи, мы видим, что роль ЭДС играет величина, состоящая из двух слагаемых: из ЭДС источника тока $\mathscr{E}$ и из величины $-d\Phi/dt$. Этот член представляет собой добавочную ЭДС (ЭДС индукции), обусловленную действием сторонних сил при движении участка AC.

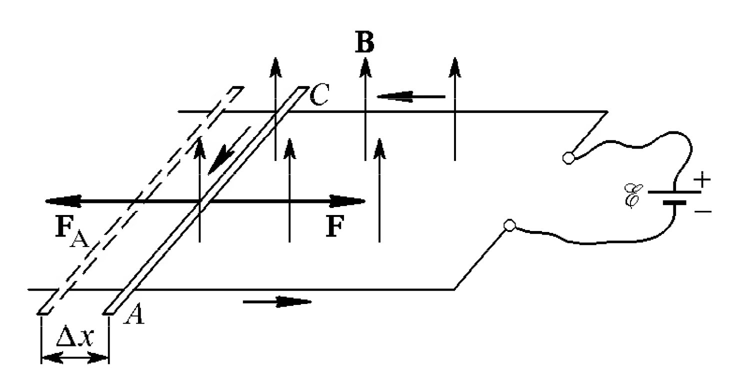


Рис. 121. К энергетическим превращениям при электромагнитной индукции

Обратим внимание на то, что приведенные рассуждения фактически представляют собой вывод закона электромагнитной индукции с помощью закона сохранения энергии.

Рассмотренный пример можно представить как упрощенную модель электродвигателя постоянного тока. Как видно из уравнения (2), энергия источника тока используется для совершения работы над внешними телами и частично рассеивается в виде джоулевой теплоты. Из формулы (3) видно, какую роль играет явление электромагнитной индукции в работе электродвигателя. Именно благодаря этому явлению не вся работа источника превращается в теплоту.

Теперь предположим, что стержень AC скользит в противоположном направлении, т. е. в направлении действия внешней силы. При этом работа силы Ампера F_{A} отрицательна, так как $\Delta\Phi = 0$. Равная ей по модулю работа внешней силы F положительна. Джоу-

лева теплота теперь выделяется как за счет работы источника тока, так и за счет работы внешней силы F. Закон сохранения энергии имеет вид

$$\mathscr{E} I \,\Delta t + I \,|\Delta\Phi| = I^2 R \,\Delta t, \tag{4}$$

откуда, переходя к пределу $\Delta t \to 0$, получаем

$$I = \frac{\mathscr{E} - |d\Phi/dt|}{R}. \tag{5}$$

В этом случае устройство работает как генератор. Даже если мы уберем источник тока ($\mathscr{E} = 0$), в цепи все равно будет идти ток и выделяться теплота. Из уравнения (4) видно, что это будет происходить за счет работы внешней силы.

Обратим внимание на то, что на самом деле нет необходимости рассматривать эти случаи — электродвигатель и генератор по отдельности. Легко видеть, что уравнение баланса энергии (2) и уравнение закона Ома (3) охватывают оба случая, если только учитывать знак изменения магнитного потока $\Delta\Phi$. Таким образом, одно и то же устройство может служить моделью и электродвигателя, и генератора. Его работа в любом режиме описывается одними и теми же уравнениями. В электрической машине направление преобразования энергии может быть изменено на обратное. Свойство обратимости присуще всем машинам постоянного тока и широко используется в технике.

Типы электрических машин. Конструктивно электрические машины постоянного тока могут быть выполнены по-разному. Основное различие заключается в способе создания магнитного поля. В простейших маломощных моторчиках используются постоянные магниты. В тех случаях, когда для этой цели используется электромагнит, его обмотка соединяется с обмоткой якоря либо параллельно (шунтовая машина), либо последовательно (сериесная машина). Возможны и комбинированные схемы соединения (компаунд-машины).

Каждая из таких машин имеет свои достоинства и недостатки. Для шунтовых двигателей характерно малое изменение скорости вращения якоря в широких пределах изменения механической нагрузки. Сериесные машины обеспечивают большой крутящий момент при трогании с места и потому находят широкое применение на транспорте. Скорость их вращения существенно меняется при изменении нагрузки.

Условия работы электродвигателя. Рассмотрим подробнее электродвигатель постоянного тока с независимым возбуждением, когда магнитное поле создается либо постоянным магнитом, либо обмотками, включенными параллельно якорю. Для простоты будем пренебрегать энергетическими потерями, связанными с созданием магнитного поля.

Пусть сопротивление обмотки якоря равно R, и двигатель включен в сеть с постоянным напряжением U. Пренебрегая трением в подшипниках, исследуем условия работы электродвигателя: найдем зависимость тока в цепи, полной потребляемой двигателем мощности и механической мощности, развиваемой двигателем, угловой скорости вращения якоря и коэффициента полезного действия от механической нагрузки, т. е. от момента внешних сил, действующих на якорь.

Предположим, что к якорю электродвигателя со стороны механической нагрузки приложен постоянный вращающий момент M. Будем рассматривать работу электродвигателя в стационарном режиме, когда угловая скорость вращения якоря ω не меняется со временем. Пусть в цепи якоря идет ток I. Воспользуемся законом сохранения энергии: потребляемую двигателем от сети мощность $P = IU$ приравняем сумме механической мощности $P_{\text{м}}$, развиваемой двигателем, и джоулевой теплоты, выделяющейся в якоре в единицу времени:

$$IU = P_{\text{м}} + I^2R. \tag{6}$$

Поскольку при вращении якоря в постоянном магнитном поле в его обмотке возникает ЭДС индукции, ток I определяется законом Ома для неоднородного участка цепи:

$$I = \frac{U - \mathscr{E}}{R}, \tag{7}$$

где $\mathscr{E}$ — абсолютная величина ЭДС самоиндукции.

Сравнивая эти формулы, легко увидеть, что

$$P_{\text{м}} = I\mathscr{E}. \tag{8}$$

Это соотношение, разумеется, очевидно, если вспомнить, что ЭДС самоиндукции и представляет собой работу сторонних сил.

Поскольку при независимом возбуждении магнитное поле статора постоянно, то скорость изменения магнитного потока и, следовательно, ЭДС индукции пропорциональна угловой скорости вращения якоря ω. Поэтому равенство (8) можно переписать в виде

$$P_{\text{м}} = Ik\omega, \tag{9}$$

где k — коэффициент пропорциональности, зависящий от индукции магнитного поля статора и от конструкции электродвигателя, т. е. от размеров и формы обмотки якоря. С другой стороны, развиваемая двигателем механическая мощность при равномерном вращении якоря равна произведению механического момента M на угловую скорость:

$$P_{\text{м}} = M\omega. \tag{10}$$

Из сравнения выражений (9) и (10) видим, что при установившемся вращении якоря ток в его обмотке пропорционален приложенно-

му механическому моменту:

$$I = M/k. \tag{11}$$

Однако из соотношения (7) следует, что ток не может превышать значения

$$I_{\max} = U/R, \tag{12}$$

которое достигается при $\mathscr{E} = 0$, т. е. при неподвижном якоре. Это означает, что максимальный механический момент, который может развить двигатель, равен

$$M_{\max} = kU/R. \tag{13}$$

Если момент внешних сил, действующих на якорь, будет превышать это значение, то якорь будет вращаться в противоположную сторону и двигатель будет работать как генератор.

Максимальная мощность двигателя. Итак, из равенства (11) следует, что зависимость тока в якоре от приложенного механического момента линейная (рис. 122*а*), причем максимальные значения $I_{\max}$ и $M_{\max}$ даются формулами (12) и (13).

Полная мощность, потребляемая электродвигателем от сети, есть $P = IU = UM/k$, а ее максимальное значение

$$P_{\max} = I_{\max}U = \frac{U^2}{R}.$$

Зависимость потребляемой мощности от M представлена на рис. 122*б* прямой *1*.

С помощью формул (6) и (11) выражение для механической мощности, развиваемой двигателем, можно представить в виде

$$P_{\text{м}} = \frac{U}{k}M - \frac{R}{k^2}M^2. \tag{14}$$

Это уравнение параболы, ветви которой направлены вниз (кривая *2* на рис. 122*б*). Механическая мощность двигателя обращается в нуль при $M = 0$, т. е. при работе двигателя на холостом ходу, и при $M = M_{\max}$, когда якорь не вращается. Совсем нетрудно убедиться, что максимальное значение механической мощности двигателя достигается при $M = M_{\max}/2$ и равно

$$P_{\text{м}\max} = \frac{1}{4}P_{\max} = \frac{1}{4}\frac{U^2}{R}. \tag{15}$$

КПД двигателя. Коэффициент полезного действия двигателя, определяемый как отношение механической мощности к полной мощности, потребляемой от сети, равен

$$\eta = \frac{P_{\text{м}}}{P} = 1 - \frac{R}{kU}M. \tag{16}$$

Зависимость КПД от M представлена на рис. 122*в*. Для определения зависимости угловой скорости якоря от механической нагрузки вернемся к формуле (10). Подставляя в нее $P_м$ из (14), получаем $\omega = U/k - (R/k^2)M$. График зависимости ω от M — также прямая (рис. 122*г*). При отсутствии внешней нагрузки, т. е. на холостом ходу, угловая скорость максимальна:

$$\omega_0 = U/k. \qquad (17)$$

С помощью формулы (17) коэффициент пропорциональности k между ЭДС самоиндукции и угловой скоростью ω, входящий в формулу для искомых величин, можно выразить через угловую скорость холостого хода ω_0, которую легко измерить на опыте.

Приведенные на рисунке зависимости наглядно иллюстрируют условия работы электродвигателя. Стремление получить от данного электродвигателя возможно больший вращающий момент неизбежно приведет, как это видно из рис. 122*б*,*в*, к тому, что механическая мощность двигателя и его КПД будут крайне низкими, а угловая скорость якоря близка к нулю. Почти вся потребляемая при этом от сети энергия пойдет на нагревание обмотки якоря.

Для получения максимальной полезной мощности от данного двигателя механическую нагрузку необходимо рассчитывать. Механический момент внешних сил должен быть равен половине максимального момента, который может развить данный электродвигатель. Этого можно добиться использованием редуктора. Коэффициент полезного действия двигателя, работающего в таком режиме, равен 0,5.

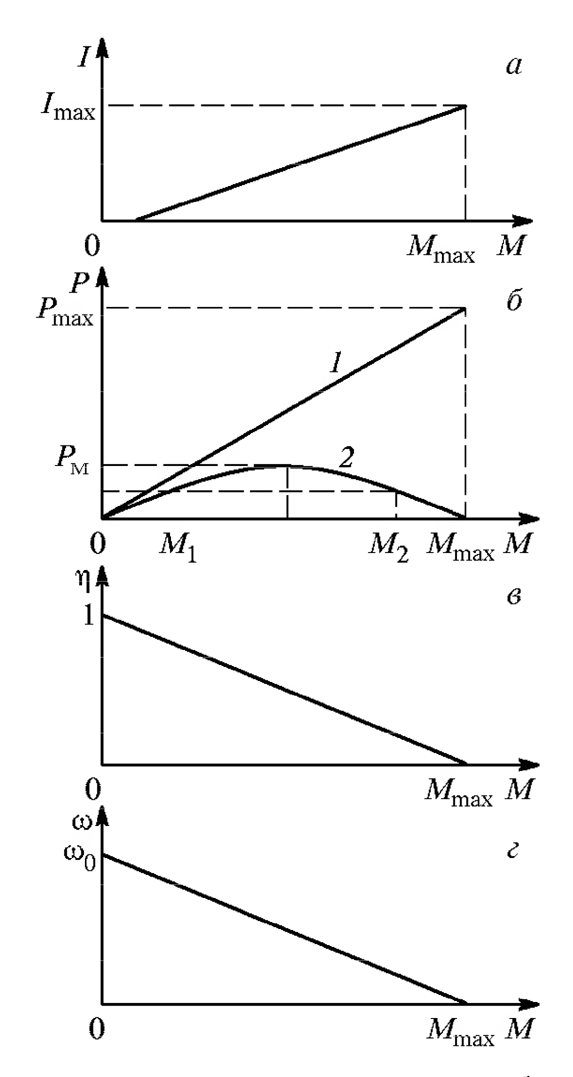


Рис. 122. Зависимость тока в обмотке якоря (*а*), полной и полезной мощности (*б*), КПД (*в*) и угловой скорости якоря (*г*) от момента внешних сил

Любую механическую мощность $P_{м1}$, меньшую максимальной, можно получить при двух значениях момента внешних сил M_1 и M_2 (рис. 122*б*). Для получения высокого КПД при заданной полезной мощности следует, как видно из рис.122*б*, выбирать меньшее значение момента внешних сил M_1: при этом бесполезный расход энергии на нагревание обмотки якоря будет меньше.

Задача

Якорь электродвигателя постоянного тока с независимым возбуждением потребляет от сети ток I. Чему равен КПД двигателя при работе в таком режиме, если при полном затормаживании якоря сила тока в нем возрастает до значения I_0? Потерями на трение пренебречь.

Решение. КПД электродвигателя — это отношение развиваемой им механической мощности $P_м$ к потребляемой якорем от сети электрической мощности P: $\eta = P_м/P$. Потребляемая мощность равна, очевидно, $P = IU$, где U — напряжение сети. Механическая мощность в соответствии с (8) равна $P_м = I\mathscr{E}$, где $\mathscr{E}$ — ЭДС самоиндукции, возникающая при вращении обмоток якоря в магнитном поле при заданном в условии режиме работы двигателя. Таким образом,

$$\eta = \frac{P_м}{P} = \frac{\mathscr{E}}{U}. \qquad (18)$$

Отношение $\mathscr{E}/U$ легко найти, если воспользоваться законом Ома для каждого из рассматриваемых случаев. При заторможенном якоре ЭДС индукции отсутствует и сила тока I_0 определяется соотношением

$$I_0 = U/R. \qquad (19)$$

При вращающемся якоре сила тока в нем определяется законом Ома для неоднородного участка цепи:

$$I = (U - \mathscr{E})/R. \qquad (20)$$

Разделив почленно (20) на (19), выражаем отношение $\mathscr{E}/U$ через отношение токов I/I_0, после чего с помощью (18) получаем

$$\eta = 1 - \frac{I}{I_0}.$$

Этот результат можно, разумеется, получить и из приведенной в тексте формулы (16), если заметить, что в ней $U/R = I_0$, а M/k, как следует из (11), равно силе тока в якоре при его вращении.

- Поясните описанную в тексте линейную модель электрической машины. В каком случае она соответствует электродвигателю и в каком — электрогенератору?
- Объясните возможность использования электродвигателя постоянного тока в качестве электрогенератора, основываясь на законе сохранения энергии.
- Используя аналогию между поступательным движением и вращением, покажите справедливость формулы (10) $P_м = M\omega$ для мощности, развиваемой механическим вращающим моментом M.
- Почему электродвигатель потребляет максимальный ток, когда его якорь заторможен? Почему при этом развиваемый данным двигателем крутящий момент будет наибольшим?
- Покажите, что максимальное значение механической мощности, развиваемой электродвигателем, равно четверти потребляемой им от сети мощности при заторможенном якоре. Чему равен КПД двигателя, когда он развивает максимальную механическую мощность?

- Нарисуйте электрические схемы включения обмоток шунтовых и сериесных электродвигателей и дайте качественное объяснение их особенностей, отмеченных в тексте.

§ 19. Энергия магнитного поля

Магнитное поле обладает энергией. Проще всего в этом убедиться, рассматривая процесс спадания тока в катушке при отсоединении ее от источника тока в схеме на рис. 123*а*.

Опыт по обнаружению энергии магнитного поля. До размыкания ключа в катушке идет некоторый ток I_0 и этот ток создает магнитное поле. При размыкании ключа остается последовательная цепь из катушки и резистора R (рис. 123*б*). Ток в катушке благодаря самоиндукции спадает постепенно, и при этом на сопротивлении R продолжает выделяться джоулева теплота.

За счет каких запасов энергии выделяется теплота — ведь источник питания уже отключен? Здесь убывает ток и создаваемое им магнитное поле; значит, мы можем говорить об энергии тока или об энергии создаваемого им магнитного поля.

По аналогии с электростатикой, где можно говорить об энергии зарядов или об энергии создаваемого ими поля, естественно ожидать, что в случае постоянного тока допустимы оба представления: энергию можно рассматривать либо как энергию тока, либо как энергию создаваемого им магнитного поля. Но мы уже видели, что, хотя не бывает электрического заряда без создаваемого им поля, электрическое поле без заряда — вихревое поле — может существовать и оно обладает энергией. Поэтому вопрос о локализации электрической энергии решается в пользу поля. Как мы увидим немного позже, точно так же обстоит дело и с магнитной энергией.

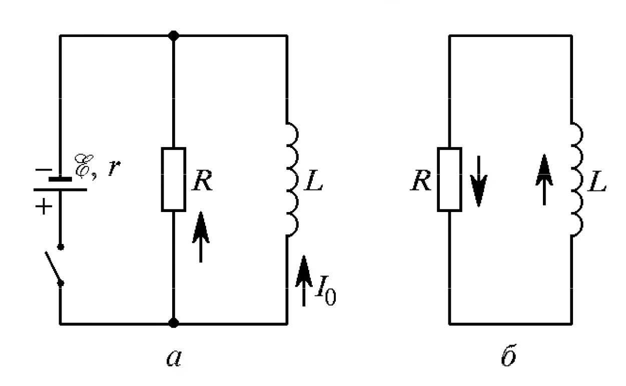


Рис. 123. Электрическая цепь для изучения магнитной энергии тока

Расчет энергии магнитного поля. Подсчитаем энергию магнитного поля. Из закона сохранения энергии очевидно, что в рассматриваемом нами опыте (рис. 123*б*) вся энергия магнитного поля в конце концов выделится в виде джоулевой теплоты на сопротивлении R. За время Δt на сопротивлении R выделяется количество теплоты $\Delta Q = I^2 R \Delta t$. По закону Ома ток I равен

$$I = \frac{\mathscr{E}}{R} = -\frac{L}{R}\frac{\Delta I}{\Delta t}. \qquad (1)$$

С учетом этого равенства выражение для ΔQ можно записать в виде

$$\Delta Q = -LI\,\Delta I = -\Phi(I)\,\Delta I. \qquad (2)$$

Выделяющаяся теплота ΔQ, разумеется, положительна, так как ток убывает и, следовательно, $\Delta I < 0$. Изобразив на графике зависимость магнитного потока $\Phi(I)$ от тока I (рис. 124), легко сообразить, что полное количество выделившейся теплоты, равное первоначальному запасу энергии магнитного поля, определяется площадью заштрихованного треугольника $(1/2)\,\Phi_0 I_0$. Таким образом, выражение для энергии магнитного поля W, создаваемого током I в катушке с индуктивностью L, имеет вид

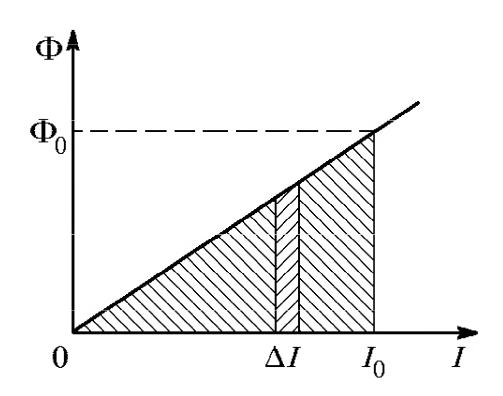


Рис. 124. К вычислению энергии магнитного поля

$$W = \frac{1}{2}\,\Phi I = \frac{1}{2}\,LI^2 = \frac{\Phi^2}{2L}. \qquad (3)$$

Объемная плотность энергии магнитного поля. Как и в электростатике, можно ввести понятие *объемной плотности энергии* магнитного поля. Рассматривая однородное магнитное поле внутри длинного соленоида, подставим во вторую из формул (3) выражение (10) § 17 для индуктивности длинного соленоида, а ток I выразим через индукцию магнитного поля с помощью формулы (8) § 17. В результате получим

$$W = \frac{1}{2\mu_0}\,B^2 V, \qquad (4)$$

откуда объемная плотность энергии магнитного поля w равна

$$w = \frac{B^2}{2\mu_0}. \qquad (5)$$

Вернемся к опыту, схема которого показана на рис. 123, и повторим его, вдвинув предварительно в катушку железный сердечник. Установившееся значение силы тока в катушке будет таким же, так как сердечник не сказывается на полном сопротивлении цепи постоянного тока. Но при размыкании ключа мы обнаружим, что теперь в резисторе R выделится гораздо большее количество теплоты, чем в отсутствие сердечника. Это означает, что в катушке с сердечником запас энергии магнитного поля при том же токе в ней стал гораздо больше. Глядя на формулу (3), выражающую энергию магнитного поля через силу тока I, убеждаемся, что благодаря железному сердечнику возрастает индуктивность L катушки и создаваемый ею магнитный поток Φ.

Магнитная проницаемость вещества. Опыт показывает, что индуктивность всякого контура зависит от свойств среды, в которой он находится. Будем считать, что окружающая среда однородна и за-

полняет все пространство, где имеется магнитное поле. Для длинной катушки это практически означает, что сердечник заполняет все пространство внутри ее обмотки. Тем более это справедливо и для замкнутой тороидальной катушки.

Обозначим через L_0 индуктивность катушки в вакууме, а через L — ее индуктивность с сердечником. Безразмерное отношение

$$\frac{L}{L_0} = \mu$$

называют *относительной магнитной проницаемостью* (или просто *магнитной проницаемостью*) вещества, из которого сделан сердечник.

Магнитная проницаемость зависит от рода (химического состава) вещества и от его состояния, например от температуры. Она показывает, во сколько раз увеличивается ($\mu > 1$) или уменьшается ($\mu < 1$) магнитная индукция в веществе по сравнению с ее значением в вакууме при тех же значениях токов, создающих магнитное поле.

Вещества с $\mu \gg 1$ (железо, кобальт, никель, некоторые сплавы) называются *ферромагнетиками*. Магнитное поле в них усиливается во много раз. Для каждого ферромагнетика существует характерная температура, *точка Кюри*, выше которой он превращается в парамагнетик. *Парамагнетиками* называют вещества с $\mu \geqslant 1$ (алюминий, платина, кислород). Вещества с $\mu < 1$, в которых магнитное поле ослабляется, называются *диамагнетиками* (медь, серебро, висмут). В неоднородном магнитном поле парамагнетик втягивается в область сильного поля, а диамагнетик — выталкивается из нее. В сверхпроводники магнитное поле вообще не проникает (эффект Мейсснера).

О природе магнитных свойств вещества. Магнитные свойства вещества обусловлены тем, что при помещении его во внешнее магнитное поле происходит намагничивание — каждый малый его элемент приобретает магнитный момент, т. е. становится магнитным диполем, подобным маленькому замкнутому контуру с током.

Диамагнетизм вещества представляет собой индукционный эффект, обусловленный индуцированными магнитным полем орбитальными токами в атомах или молекулах. Диамагнетизм — общее свойство всех веществ, но наиболее он проявляется в тех веществах, где атомы или молекулы не обладают собственным магнитным моментом. Парамагнетизм и ферромагнетизм, как правило, связаны с наличием у электронов собственных, не связанных с их орбитальным движением магнитных моментов. В кристаллах ферромагнитных веществ оказывается энергетически выгодной параллельная ориентация магнитных моментов электронов, и образуются макроскопические намагниченные области протяженностью $10^{-2} - 10^{-4}$ см — так называемые *домены*. В разных доменах магнитное поле ориентировано по-разному, но при наложении внешнего магнитного поля происходит упоря-

дочение полей отдельных доменов. У некоторых ферромагнитных веществ упорядоченная ориентация магнитных моментов доменов сохраняется и после выключения внешнего магнитного поля — получаются постоянные магниты.

Отмеченными тремя типами магнетиков не исчерпывается все многообразие магнитных свойств вещества. Среди магнитоупорядоченных веществ, кроме ферромагнетиков, различают еще, например, антиферромагнетики, ферримагнетики, для которых характерны более сложные закономерности магнитной структуры.

Микроскопическая теория, правильно объясняющая строение и магнитные свойства вещества, может быть развита только на основе квантовых представлений.

Магнитоупорядоченные вещества находят все более и более широкое применение в науке и технике, начиная от всем известных радио- и электротехнических устройств до современной микроэлектроники и вычислительной техники.

- Покажите из энергетических соображений, что при замыкании цепи ток в катушке индуктивности нарастает постепенно. От чего зависит скорость его нарастания?
- Какой вывод о зависимости магнитной энергии от индуктивности катушки можно сделать из формулы (3): эта энергия пропорциональна или обратно пропорциональна индуктивности?
- Объясните, почему наличие железного сердечника не приводит к изменению установившегося значения силы тока в катушке в опыте, схема которого показана на рис. 123.
- Приведите аргументы, подтверждающие квадратичную зависимость объемной плотности магнитной энергии от индукции поля.
- Дайте качественное объяснение различию в характере поведения диамагнетиков и парамагнетиков в неоднородном магнитном поле.

§ 20. Основы теории электромагнитного поля

Изучая электромагнитную индукцию, мы видели, что при рассмотрении этого явления в определенной инерциальной системе отсчета возможны две различные причины возникновения индукционного тока. В лабораторной системе отсчета причина ЭДС — это либо появление вихревого электрического поля, либо действие силы Лоренца на движущиеся вместе с проводником электрические заряды со стороны магнитного поля. Однако при анализе возникновения ЭДС индукции за счет силы Лоренца в опыте с металлической рамкой, движущейся в магнитном поле (см. рис. 113), мы можем рассуждать и иначе.

Относительный характер электрического и магнитного полей. Перейдем в систему отсчета, связанную с движущейся рамкой. В ней заряды неподвижны и, следовательно, со стороны магнитного

поля сила на них не действует. Строго говоря, при наличии тока заряды движутся вдоль проводника со скоростью дрейфа u (см. рис. 114), и в магнитном поле на них действует сила Лоренца. Однако она направлена поперек проводника и не может объяснить возникновение ЭДС.

Как же объяснить возникновение ЭДС индукции в этой системе отсчета? Единственное, что остается предположить, это наличие в этой системе электрического поля, направленного перпендикулярно магнитному вдоль стороны ab рамки, которого не было в исходной системе отсчета. Действительно, в любой инерциальной системе отсчета в единицах СИ действующая на заряд сила определяется формулой (5) § 17:

$$F = q\,(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}). \tag{1}$$

Поскольку в системе отсчета, связанной с рамкой, $\mathbf{v} = 0$, сила $\mathbf{F}$ может быть обусловлена только электрическим полем $\mathbf{E}'$, существующим в этой системе.

Электрическое и магнитное поля в разных системах отсчета. Итак, мы приходим к выводу об относительном характере электрического и магнитного полей. Согласно принципу относительности все инерциальные системы отсчета равноправны. Это справедливо не только для механических явлений, но и для явлений любой при-

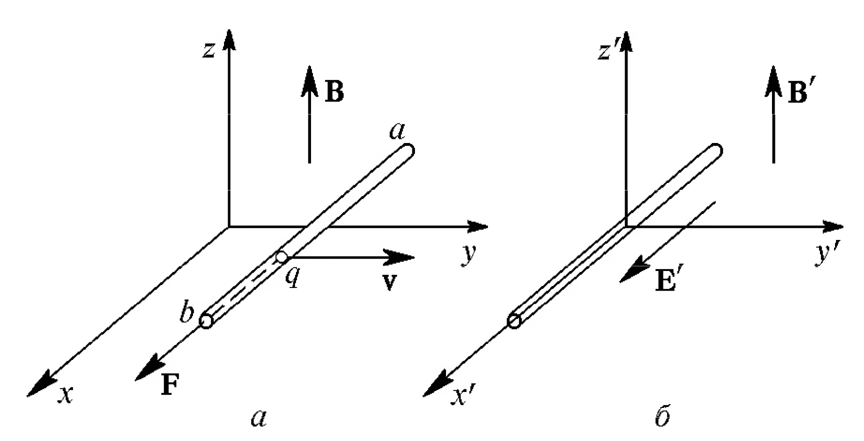


Рис. 125. К объяснению возникновения ЭДС индукции в разных системах отсчета

роды, в том числе электромагнитных. В обсуждаемом здесь опыте наблюдаемой величиной является ЭДС индукции в рамке, и она существует независимо от того, в какой инерциальной системе этот опыт рассматривается.

Как мы видели, в одной системе отсчета, где электрическое поле отсутствует, существование ЭДС объясняется силой Лоренца (рис. 125*а*), в то время как в другой, где рамка неподвижна, — только наличием электрического поля (рис. 125*б*). При малых скоростях ($v \ll c$), когда можно пренебречь изменением силы $\mathbf{F}$ при переходе от одной системы отсчета к другой, из формулы (1) следует, что напряженность электрического поля $\mathbf{E}'$ в системе, где рамка не-

подвижна, должна быть равна

$$\mathbf{E}' = \mathbf{v} \times \mathbf{B}. \tag{2}$$

Итак, движущийся магнит кроме магнитного создает и электрическое поле.

Обратим вниманис на то, что относительный характер электрического и магнитного полей мы могли заметить и раньше. В самом деле, неподвижный заряд создает только электрическое поле. Однако заряд, неподвижный в какой-либо одной системе отсчета, относительно других систем отсчета движется. Такой движущийся заряд подобен электрическому току и потому создает магнитное поле. Таким образом, если в какой-либо системе отсчета есть только электрическое поле, то в любой другой системе будет еще и магнитное.

Получим формулу для индукции магнитного поля в этом случае, аналогичную формуле (2). Рассмотрим систему отсчета, движущуюся со скоростью $\mathbf{v}$ относительно заряда q. В этой системе отсчета заряд движется со скоростью $-\mathbf{v}$. Создаваемое им магнитное поле, в соответствии с формулой (16) § 15, дается выражением

$$\mathbf{B}' = -\frac{\mu_0}{4\pi} q \frac{\mathbf{v} \times \mathbf{r}}{r^3}. \tag{3}$$

Но в этой же точке заряд q создает электрическое поле $\mathbf{E}$, равное

$$\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3}. \tag{4}$$

Сравнивая формулы (3) и (4), видим, что магнитное поле, создаваемое движущимся со скоростью $-\mathbf{v}$ зарядом, связано с электрическим полем $\mathbf{E}$, создаваемым этим же зарядом в той системе отсчета, где он неподвижен, соотношением

$$\mathbf{B}' = -\varepsilon_0\mu_0 \, \mathbf{v} \times \mathbf{E}. \tag{5}$$

Эта формула, полученная для точечного заряда, справедлива и для поля, создаваемого любым распределением зарядов.

Таким образом, если в некоторой системе отсчета существует только электрическое поле $\mathbf{E}$, то в другой системе отсчета, движущейся со скоростью $\mathbf{v}$ относительно исходной, существует еще и магнитное поле $\mathbf{B}$, которое вычисляется по формуле (5).

Инварианты электромагнитного поля. Формулы (2) и (5) представляют собой частные случаи преобразования полей при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой. Они справедливы при малой относительной скорости систем отсчета ($v \ll c$). В общем случае, когда в исходной системе отсчета есть и электрическое, и магнитное поле, нерелятивистские формулы преобразования в СИ имеют вид

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}, \qquad \mathbf{B}' = \mathbf{B} - \varepsilon_0\mu_0 \, \mathbf{v} \times \mathbf{E}. \tag{6}$$

В дальнейшем мы увидим, что $\varepsilon_0\mu_0 = 1/c^2$, где c — скорость света в вакууме.

Формулы преобразования электрического и магнитного полей при относительной скорости систем отсчета, сравнимой со скоростью света, более громоздки, чем (6). Однако всегда при переходе от одной инерциальной системы отсчета к другой существуют инвариантные, т. е. не меняющие своего значения, комбинации из векторов **E** и **B**. Независимых комбинаций только две — это скалярное произведение этих векторов и их разность квадратов:

$$\mathbf{E}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{E}'\cdot\mathbf{B}', \tag{7}$$

$$E^2 - c^2B^2 = E'^2 - c^2B'^2. \tag{8}$$

Формулы (7) и (8) позволяют сделать ряд важных выводов о свойствах электромагнитного поля. Если в какой-либо инерциальной системе отсчета электрическое и магнитное поля взаимно перпендикулярны, то, как видно из (7), они будут взаимно перпендикулярны и во всякой другой системе. Для таких взаимно ортогональных полей можно найти такую систему отсчета, в которой либо $\mathbf{B} = 0$, либо $\mathbf{E} = 0$, смотря по тому, положителен или отрицателен инвариант (8).

Из относительного характера электрического и магнитного полей естественно вытекает, что при изучении электрических и магнитных явлений имеет смысл рассматривать эти поля совместно, как единое электромагнитное поле. При переходе от одной системы отсчета к другой электрическое поле в одной системе, как мы видели, выражается и через электрическое поле, и через магнитное поле в другой системе, и наоборот. Поэтому естественно ожидать, что между электрическими и магнитными явлениями существует определенная симметрия. Изменение магнитного поля порождает вихревое электрическое поле. Оказывается, что справедливо и обратное: изменяющееся во времени электрическое поле порождает магнитное поле.

Изменяющееся электрическое поле как источник магнитного поля. К этому выводу можно прийти, анализируя уже известные нам экспериментальные факты и описывающие их физические законы. Рассмотрим участок электрической цепи, содержащий длинный прямолинейный провод и плоский конденсатор (рис. 126*а*). Будем считать, что в течение некоторого достаточно малого промежутка времени ток в этой цепи равен I. Этот ток связан с изменением заряда конденсатора соотношением $I = dq/dt$.

Рассмотрим круговой контур l, охватывающий проводник, как показано на рис. 126*а*. Ток I создает магнитное поле, поэтому по теореме о циркуляции вектора индукции магнитного поля имеем

$$\sum_i B_i\,\Delta l = \mu_0 I. \tag{9}$$

В правой части (9) стоит заряд, пересекающий ограниченную контуром l поверхность S в единицу времени. Будем теперь растягивать поверхность, ограниченную контуром l, так, чтобы она, не пересекая провода с током, прошла в промежутке между пластинами конденсатора (S' на рис. 126*б*). В этом случае никакие заряды не пересекают ограниченную контуром вытянутую поверхность, и в этом смысле ток I в (9) равен нулю. Но магнитное поле вокруг провода, в том месте, где расположен контур, исчезнуть не может, и левая часть (9) не изменяет своего значения при деформации поверхности. Мы приходим к противоречию: левая часть (9) отлична от нуля, а правая равна нулю. Значит, в формуле (9) чего-то не хватает. Естественно ожидать, что на самом деле в правой части этой формулы должен стоять еще один член, который равен нулю, если стягиваемая контуром поверхность пересекает провод.

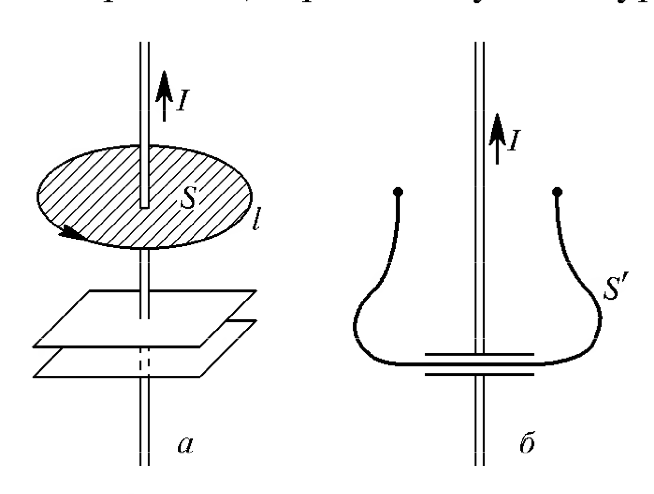


Рис. 126. Циркуляция вектора магнитной индукции не зависит от того, пересекает ли стягиваемая им поверхность провод с током (*а*) или проходит между обкладками конденсатора (*б*)

Как угадать вид этого члена? Так как левая часть формулы (9) при деформации поверхности не изменилась, то попробуем подставить в правую часть (9) вместо I равную ему скорость изменения заряда dq/dt на обкладках конденсатора и попытаемся интерпретировать эту величину так, чтобы она имела смысл и в той области, где отсутствуют движущиеся заряды. Поскольку заряд конденсатора q равен произведению поверхностной плотности заряда σ на площадь пластины S, то при неизменных размерах и форме конденсатора $dq/dt = S\, d\sigma/dt$. Выражая поверхностную плотность заряда через напряженность электрического поля между пластинами $E = \sigma/\varepsilon_0$, перепишем (9) в виде

$$\sum_i B_i \Delta l = \varepsilon_0 \mu_0 S \frac{dE}{dt}. \qquad (10)$$

В отличие от тока I, величина dE/dt не равна нулю в промежутке между обкладками конденсатора. Поскольку произведение ES представляет собой поток напряженности электрического поля E через поверхность S, ограниченную контуром, то в правой части (10) стоит величина, пропорциональная скорости изменения потока N напряженности электрического поля:

$$\sum_i B_i \, \Delta l = \varepsilon_0 \mu_0 \frac{dN}{dt}. \qquad (11)$$

Обобщение теоремы о циркуляции магнитного поля. Если теперь вместо (9) и (11) написать формулу

$$\sum_i B_i \, \Delta l = \mu_0 I + \varepsilon_0 \mu_0 \frac{dN}{dt}, \tag{12}$$

то она будет справедлива всегда, независимо от того, где проходит поверхность, ограниченная контуром l. Если поверхность пересекает провод, то второй член в правой части (12) практически равен нулю и мы возвращаемся к теореме о циркуляции магнитного поля (9). Если же поверхность проходит внутри конденсатора, то $I = 0$, первый член в правой части вклада не дает, но, как мы видели, положение спасает второе слагаемое.

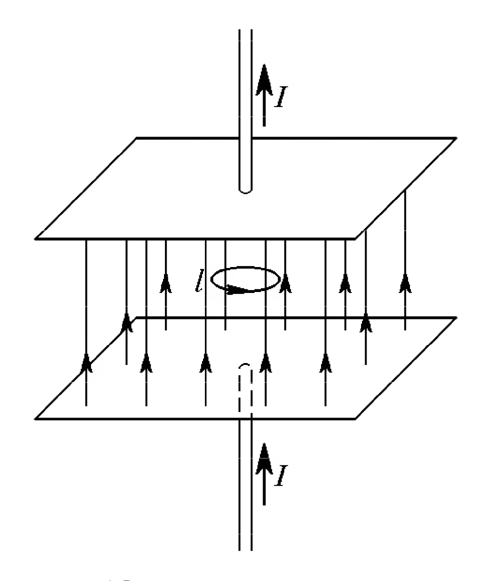


Рис. 127. Изменение электрического поля приводит к появлению магнитного поля

Возникает вопрос: является ли добавленное второе слагаемое в правой части (12) чисто формальным, необходимым только для того, чтобы формула была справедлива при любой поверхности, ограниченной данным контуром, или оно имеет физический смысл и соответствует тому, что магнитное поле возбуждается изменяющимся электрическим полем? Ответ на этот вопрос можно получить, если рассмотреть несколько видоизмененный опыт (рис. 127), где контур l расположен целиком внутри большого конденсатора, расстояние между пластинами которого велико по сравнению с размерами контура. Опыт показывает, что внутри конденсатора есть магнитное поле; однако очевидно, что это поле не может создаваться далеко расположенными проводами с током I. Значит, в этом случае магнитное поле возникает из-за изменения электрического поля. Циркуляция индукции этого магнитного поля по контуру определяется скоростью изменения потока напряженности электрического поля через поверхность, ограниченную этим контуром.

Ток смещения. Величина $\varepsilon_0 dN/dt$ получила название *тока смещения*, так как она, подобно току проводимости I, является источником магнитного поля. Термин «смещение» обусловлен историческими причинами и связан с утратившей значение механической моделью электрического поля. Следует отметить, что ток смещения эквивалентен току проводимости только в отношении способности создавать магнитное поле. Например, при наличии тока смещения не выделяется джоулева теплота.

Ток смещения был впервые предсказан Максвеллом на основе теоретического анализа известных к тому времени экспериментально установленных законов электромагнетизма. Максвелл показал,

что единая непротиворечивая картина электромагнитных явлений, согласующаяся с законом сохранения электрического заряда, может быть создана, только если предположить, что изменяющееся электрическое поле способно создавать магнитное поле. Из написанной им системы уравнений электромагнитного поля следуют как все экспериментальные законы электромагнетизма, так и существование тока смещения.

Уравнения Максвелла. Система уравнений Максвелла содержит четыре основных закона электромагнетизма. Первый закон — *теорема Гаусса*, связывающая поток напряженности электрического поля через замкнутую поверхность с полным зарядом внутри этой поверхности. В случае неподвижных зарядов теорема Гаусса дает иную математическую формулировку экспериментальному закону Кулона. Устанавливаемая теоремой Гаусса связь между потоком напряженности электрического поля через замкнутую поверхность и полным зарядом внутри поверхности справедлива при движении как зарядов, так и поверхности в целом или отдельных ее участков (т. е. при деформации поверхности).

Второй закон — *теорема Гаусса для магнитного поля*, согласно которой поток вектора магнитной индукции через любую замкнутую поверхность равен нулю. Эта теорема отражает вихревой характер магнитного поля и отсутствие в природе магнитных зарядов.

Третий закон — *закон электромагнитной индукции* Фарадея, согласно которому изменяющееся магнитное поле порождает вихревое электрическое поле.

Четвертый закон является обобщением *закона Био—Савара—Лапласа*. Магнитное поле может создаваться как движущимися электрическими зарядами, т. е. токами проводимости, так и изменяющимся электрическим полем, т. е. токами смещения.

Анализируя систему уравнений электромагнитного поля, Максвелл пришел к выводу, что эти уравнения допускают существование связанных между собой электрического и магнитного полей, распространяющихся в пространстве со скоростью света, — *электромагнитных волн*, которые позднее были экспериментально обнаружены Герцем.

Гауссова система единиц. При теоретическом описании электромагнитного поля наиболее простой и естественной является так называемая *гауссова система единиц*, которая для электрических величин совпадает с абсолютной электростатической системой СГСЭ. Единицы магнитных величин вводятся в гауссовой системе следующим образом.

Будем исходить из выражения для магнитной индукции поля, создаваемого бесконечным прямолинейным током:

$$B = k\,\frac{2I}{r}. \tag{13}$$

Обнаружить магнитное поле можно по его действию на другой проводник с током. Если этот проводник расположить параллельно проводнику, создающему магнитное поле, то действующая на него сила согласно закону Ампера будет пропорциональна индукции магнитного поля B, силе тока в нем I' и его длине l:

$$F = k'I'Bl. \tag{14}$$

Напомним, что в единицах СИ коэффициент k' в формуле (14) равен единице в соответствии с определением индукции магнитного поля B через момент сил, действующих на рамку с током. В формуле (13) или в законе Био—Савара—Лапласа, из которого она следует, коэффициент k записывается в виде $\mu_0/4\pi$, а его значение (или значение магнитной постоянной μ_0) получается из определения ампера через силу взаимодействия двух параллельных токов.

В гауссовой системе единиц коэффициенты k и k' вводятся иначе.

Коэффициент k в формуле (13) может быть выбран произвольно, так как единица индукции поля B еще не установлена. Но после того, как этот коэффициент k в (13) выбран (тем самым выбрана и единица индукции B), коэффициент k' в формуле (14) уже не может выбираться произвольно, а должен определяться из эксперимента. Разумеется, можно поступить и наоборот: использовать уравнение (14) для введения единицы индукции поля, полагая $k' = 1$; тогда коэффициент k в (13) будет определяться на опыте. В системе Гаусса поступают следующим образом. Выбирают коэффициент k в формуле (13) так, чтобы он равнялся коэффициенту k' в формуле (14).

Электродинамическая постоянная. Если подставить в формулу (14) индукцию B из (13), то для силы взаимодействия двух параллельных проводников с токами I и I', находящихся на расстоянии r друг от друга, получим следующее выражение:

$$F = kk'\,\frac{2II'l}{r}. \tag{15}$$

В гауссовой системе $kk' = k^2$. Поскольку для всех величин, входящих в эту формулу, единицы уже выбраны, коэффициент k^2, как легко убедиться, имеет размерность $L^{-2}T^2$, т. е. обратную размерности квадрата скорости. Этот коэффициент должен определяться экспериментально по измерению силы взаимодействия двух параллельных проводников, находящихся на известном расстоянии, когда по ним протекают известные токи. Опыт показал, что числовое значение k^2 равно $1/c^2$, где c — так называемая электродинамическая постоянная, равная скорости света в вакууме:

$$c \approx 2{,}9979246 \cdot 10^{10}\ \text{см/с}.$$

В гауссовой системе единиц закон Био—Савара—Лапласа и закон Ампера записываются в виде

$$\Delta B = \frac{1}{2}\frac{I\,\Delta l\,\sin\alpha}{r^2}, \qquad F = \frac{1}{2}\,I'Bl. \tag{16}$$

На основании последней формулы и устанавливается единица индукции магнитного поля — *гаусс*. Один гаусс — это индукция такого поля, которое действует на 1 см проводника с током в одну СГСЭ-единицу с силой, численно равной $1/c$ дин, если проводник расположен перпендикулярно линиям индукции магнитного поля.

Подчеркнем, что числовое значение магнитной постоянной μ_0 получается как прямое следствие определения ампера, а не устанавливается на опыте, в отличие от коэффициента $1/c^2$ в гауссовой системе. Так получается потому, что в системе СИ число основных единиц больше, чем в гауссовой и единица силы тока является основной (выбранной произвольно), в то время как в гауссовой системе эта единица является производной.

Основные формулы в гауссовой системе. Из второй формулы (16), выражающей закон Ампера, следует, что в гауссовой системе единиц выражение для силы Лоренца принимает вид:

$$\mathbf{F} = e\,\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\,\mathbf{v}\times\mathbf{B}\right). \tag{17}$$

Отсюда (как и из первой формулы (16)) следует, что в гауссовой системе размерности напряженности электрического поля и индукции магнитного поля одинаковы. Это совпадение размерностей не случайно: как мы видели, при переходе из одной системы отсчета в другую происходит частичное взаимное превращение электрического и магнитного полей. Это свойство электромагнитного поля наиболее естественным образом выражается именно в гауссовой системе единиц, где превращающиеся друг в друга физические величины E и B измеряются в единицах одинаковой размерности (хотя эти единицы и называются по-разному: единица напряженности электрического поля не имеет специального названия, а единица индукции магнитного поля называется гаусс).

Отмеченное свойство проявляется в формулах преобразования полей при переходе из одной инерциальной системы отсчета в другую. Вместо (6) в гауссовой системе имеем

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \frac{1}{c}\,\mathbf{v}\times\mathbf{B}, \quad \mathbf{B}' = \mathbf{B} - \frac{1}{c}\,\mathbf{v}\times\mathbf{E}. \tag{18}$$

В этих формулах явно выступает одинаковая размерность слагаемых в правых частях.

В гауссовой системе единиц более симметричный вид принимают и выражения для инвариантов электромагнитного поля:

$$\mathbf{EB} = \mathbf{E}'\mathbf{B}', \tag{19}$$

$$E^2 - B^2 = E'^2 - B'^2. \tag{20}$$

- Объясните кратко, почему при переходе из системы отсчета, где есть только электрическое поле, в другую систему, в последней будет еще и магнитное поле, и наоборот.
- Почему электрическое и магнитное поля, взаимно перпендикулярные в какой-либо системе отсчета, будут взаимно перпендикулярными и в любой другой системе отсчета?
- Как объяснить, что магнитное поле создается не только движущимися зарядами, но и изменяющимся со временем электрическим полем?
- В чем сходство и в чем различие между током проводимости и током смещения?
- Два электрона в вакууме отталкиваются, так как имеют одинаковые заряды. Когда они движутся параллельными курсами, между ними действует сила притяжения, как между параллельными токами. Существует ли такая скорость, при которой это притяжение превзойдет их кулоновское отталкивание?
- Какие экспериментальные законы электромагнитных явлений легли в основу системы уравнений Максвелла?
- Как вводятся коэффициенты в законах Ампера и Био—Савара—Лапласа в гауссовой системе единиц?
- Как определяется единица индукции магнитного поля в гауссовой системе единиц?
- Покажите, что в гауссовой системе единиц напряженность электрического поля и индукция магнитного поля имеют одинаковую размерность.
- Объясните, почему значение электрической постоянной ε_0 в гауссовой системе единиц устанавливается на опыте, а значение магнитной постоянной μ_0 в СИ просто вычисляется. На основе чего оно вычисляется?

§ 21. Квазистационарные явления в электрических цепях

До сих пор при изучении электромагнитных явлений мы подробно исследовали случаи, соответствующие электрическому полю неподвижных зарядов и магнитному полю постоянных токов. Такие электрическое и магнитное поля существуют независимо и не связаны друг с другом. Тем не менее большинство установленных законов справедливы и для более общих случаев, когда происходят взаимные превращения электрического и магнитного полей.

Наиболее простые явления, связанные с изменяющимися электрическим или магнитным полями — это так называемые *квазистационарные* явления в электрических цепях, содержащих резисторы, конденсаторы и катушки индуктивности.

В действительности любой проводник обладает и сопротивлением, и емкостью, и индуктивностью. Но на практике различие, например, в индуктивности катушки и линейного проводника настоль-

ко велико, что с хорошей точностью можно использовать модель цепи с сосредоточенными параметрами, т. е. считать, что каждый элемент цепи обладает только одной из этих трех характеристик.

Именно такие цепи широко используются в электротехнике, радиотелевизионной технике и микроэлектронике.

Условия квазистационарности. Будем называть явления в электрической цепи квазистационарными, если во всех ее последовательно соединенных участках силу тока в один и тот же момент времени можно считать одинаковой. В этом приближении пренебрегается конечностью скорости распространения электромагнитного поля вдоль проводов, образующих цепь. Например, при замыкании ключа ток появляется сразу, т. е. одновременно, в любом поперечном сечении, даже удаленном от источника, несмотря на то, что электроны из источника тока могут дойти до него спустя значительный промежуток времени.

Цепь с активным сопротивлением. Изучение квазистационарных явлений начнем с простейшего случая, когда изменяющееся со временем напряжение прикладывается к концам цепи, содержащей только резисторы, т. е. обычные сопротивления R. Сила тока в цепи будет даваться таким же выражением, как при приложенном постоянном напряжении:

$$I(t) = \frac{U(t)}{R}. \tag{1}$$

Равенство (1) представляет собой закон Ома для цепи, содержащей только обычное сопротивление R, называемое *активным*. При приложении к его концам переменного напряжения $U(t)$ ток в цепи изменяется по такому же закону, что и приложенное напряжение. Связывающий $U(t)$ и $I(t)$ постоянный множитель R — это то же самое сопротивление, что и для постоянного тока. Например, когда приложенное напряжение зависит от времени по гармоническому (синусоидальному) закону

$$U(t) = U_0 \cos \omega t, \tag{2}$$

сила тока в соответствии с (1) дается выражением

$$I(t) = I_0 \cos \omega t, \quad I_0 = \frac{U_0}{R}. \tag{3}$$

Ток в цепи изменяется в фазе с приложенным напряжением.

При прохождении тока, изменяющегося со временем, через активное сопротивление, происходит выделение теплоты в соответствии с законом Джоуля—Ленца. Это означает, что в резисторе происходит необратимое превращение (диссипация) электрической энергии во внутреннюю энергию.

В цепях, содержащих конденсаторы и катушки индуктивности, дело обстоит сложнее. В общем случае изменяющаяся со временем

сила тока не повторяет временной зависимости приложенного напряжения. Изучение этого вопроса начнем с частного случая, когда синусоидальное напряжение (2) прикладывается к цепи, содержащей только емкость C или только индуктивность L.

Емкостное сопротивление. В цепи, содержащей только емкость C, силу тока проще всего найти, воспользовавшись тем, что в квазистационарном случае она определяется скоростью изменения заряда конденсатора: $I = dq/dt$. Так как $q = CU$, а емкость конденсатора постоянна, то для силы тока получаем

$$I(t) = -C\omega U_0 \sin \omega t = C\omega U_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right). \quad (4)$$

Таким образом, ток в цепи имеет синусоидальный характер и опережает по фазе приложенное напряжение на $\pi/2$:

$$I(t) = I_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Связи между амплитудными значениями подаваемого напряжения U_0 и тока в цепи I_0 можно, как видно из (4), придать вид закона Ома, если ввести понятие зависящего от частоты ω *емкостного* сопротивления R_C:

$$I_0 = \frac{U_0}{R_C}, \quad R_C = \frac{1}{\omega C}. \quad (5)$$

Полученный результат можно наглядно проиллюстрировать с помощью графиков зависимости напряжения и тока от времени (рис. 128). В те моменты времени, когда подаваемое напряжение достигает экстремальных значений, заряд на конденсаторе не меняется и, следовательно, ток в цепи обращается в нуль. В точках, где напряжение обращается в нуль, его значение меняется наиболее быстро и, следовательно, ток достигает экстремальных значений.

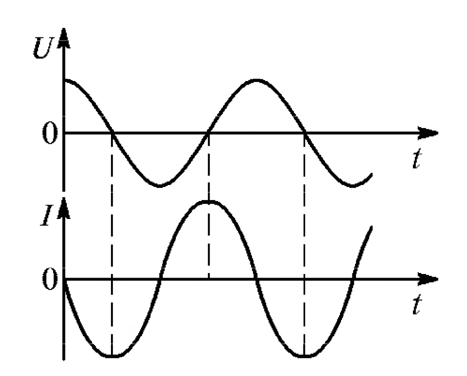


Рис. 128. Напряжение и ток в конденсаторе

Итак, физическая причина сдвига по фазе очевидна, величина сдвига равна $\pi/2$, а направление сдвига (опережение или отставание по фазе) легко установить, рассматривая, например, первую четверть периода изменения напряжения: оно убывает, т. е. конденсатор разряжается, несмотря на то, что ток увеличивается по абсолютной величине. Это возможно, только если напряжение и ток имеют противоположные знаки, т. е. график тока действительно имеет вид, изображенный на рис. 128.

При прохождении электрического тока через конденсатор не происходит диссипации электрической энергии: при зарядке конден-

сатора в нем накапливается энергия, а при разрядке эта энергия возвращается в электрическую цепь.

Индуктивное сопротивление. Случай, когда синусоидальное напряжение подается на индуктивность L, проще всего проанализировать, сравнивая выражения

$$I = C\frac{dU}{dt}, \qquad U = L\frac{dI}{dt}. \tag{6}$$

Первая формула представляет собой выражение для тока в только что рассмотренной цепи, содержащей емкость C. Второе соотношение отражает тот факт, что поданное на индуктивность L синусоидальное напряжение U в каждый момент времени компенсирует возникающую в катушке электродвижущую силу самоиндукции $\mathscr{E} = -L dI/dt$. Анализ первого из соотношений (6) привел к формуле (4). Следовательно, формула такого же типа будет получена при анализе второго из соотношений (6). Она получается из (4) заменой $I \to U$, $C \to L$:

$$U(t) = L\omega I_0 \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right). \tag{7}$$

Из первого соотношения (6) следует, что ток I опережает напряжение U на $\pi/2$; аналогично, из второго следует, что в такой цепи напряжение опережает ток на $\pi/2$. Задаваемой величиной является подаваемое напряжение $U(t) = U_0 \cos \omega t$, поэтому для тока I из (7) получаем

$$I(t) = I_0 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right).$$

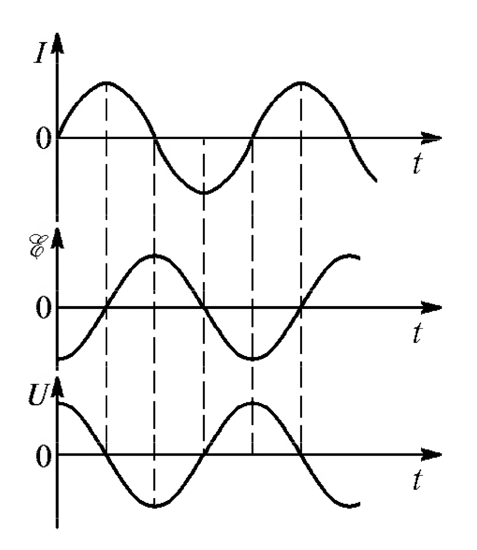


Рис. 129. Ток, ЭДС самоиндукции и напряжение на индуктивности

Как и раньше, связи между амплитудными значениями тока и напряжения можно придать вид закона Ома, если, воспользовавшись (7), ввести *индуктивное* сопротивление R_L:

$$I_0 = \frac{U_0}{R_L}, \qquad R_L = \omega L. \tag{8}$$

Полученный результат также можно проиллюстрировать с помощью графиков (рис. 129). На верхнем графике показана зависимость тока от времени. На втором графике изображена ЭДС самоиндукции. Положение экстремумов и сдвиг этого графика относительно графика тока легко определить с помощью закона электромагнитной индукции и закона Ленца: $\mathscr{E} = -L dI/dt$.

Действительно, ЭДС самоиндукции обращается в нуль в точках экстремума тока и достигает экстремальных значений в те момен-

ты, когда ток меняется наиболее быстро. В каждый момент полярность ЭДС самоиндукции должна быть такой, чтобы препятствовать изменению тока, — этим сразу устанавливается направление сдвига по фазе между током и ЭДС самоиндукции. И наконец, приложенное напряжение изменяется в противофазе с ЭДС самоиндукции (нижний график на рис. 129).

При прохождении электрического тока через катушку индуктивности не происходит диссипации энергии: при нарастании тока в катушке накапливается энергия магнитного поля, а при убывании тока эта энергия возвращается в электрическую цепь.

Фазовые сдвиги. Рассмотрение этих простейших цепей показывает, что, за исключением случая активного сопротивления R, невозможно написать закон Ома для цепей переменного тока, определяющий мгновенное значение тока $I(t)$ в виде отношения приложенного напряжения к сопротивлению соответствующего участка, вследствие того, что между током и напряжением существует сдвиг по фазе. Сдвиг по фазе между приложенным синусоидальным напряжением и силой тока характерен для цепей, содержащих емкостное или индуктивное сопротивление. Для них используется общее название — *реактивное сопротивление*. Как мы видели, закон Ома справедлив только для амплитудных значений тока и напряжения.

Подчеркнем, что введенные выше понятия емкостного и индуктивного сопротивлений имеют смысл только для синусоидального приложенного напряжения. Сами их определения содержат циклическую частоту ω этого напряжения. Ясно, что эти понятия неприменимы в случаях, когда конденсатор или катушка индуктивности подключаются к источнику постоянного напряжения или напряжения, изменяющегося со временем по какому-либо иному (несинусоидальному) закону.

- В каких случаях явления в электрических цепях называются квазистационарными?

- Как связаны между собой сила тока и изменяющееся приложенное напряжение в цепи, содержащей только обычное (активное) сопротивление R?

- Как связаны между собой сила тока и приложенное напряжение в цепи, содержащей только емкость C или только индуктивность L? Можно ли этой связи придать вид закона Ома? Применимы ли соответствующие соотношения при несинусоидальном приложенном напряжении?

- Объясните физическую причину возникновения сдвига по фазе между приложенным синусоидальным напряжением и силой тока в цепях, содержащих емкость и индуктивность.

- Что такое реактивное сопротивление? В каких случаях имеют смысл понятия индуктивного и емкостного сопротивлений?

△ **Процесс зарядки конденсатора.** Рассмотрим процесс зарядки конденсатора при подключении его к источнику постоянного напряжения U_0 (рис. 130). При замыкании ключа K в цепи скач-

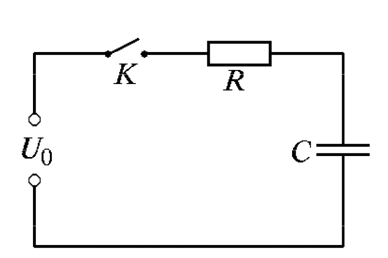


Рис. 130. Конденсатор C заряжается от источника постоянного напряжения U_0 через резистор R

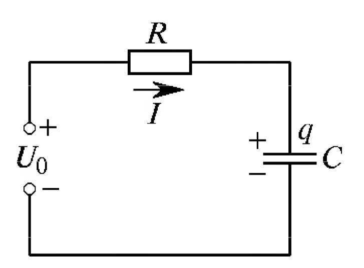


Рис. 131. При таком выборе направления тока его значение I связано с зарядом верхней пластины q соотношением $I = dq/dt$

ком возникает ток и конденсатор начинает заряжаться. По мере увеличения напряжения на конденсаторе сила тока в цепи убывает. Процесс зарядки конденсатора будет происходить до тех пор, пока напряжение на конденсаторе не станет равным напряжению источника U_0. После накопления на пластинах конденсатора необходимого для этого заряда $q_0 = CU_0$ ток в цепи прекратится, т. е. переходные процессы закончатся.

Обозначим заряд верхней на рис. 130 пластины конденсатора через q. Скорость изменения этого заряда dq/dt определяет силу тока I в цепи:

$$I = \frac{dq}{dt}. \tag{9}$$

Знак в правой части формулы (9) соответствует такому выбору направления тока, которое указано на рис. 131: положительное значение силы тока в (9) соответствует возрастанию заряда верхней пластины конденсатора, т. е. положительному значению производной dq/dt.

В рассматриваемой последовательной цепи сумма напряжений на активном сопротивлении U_R и конденсаторе U_C равна приложенному напряжению U_0. Так как напряжение на сопротивлении U_R равно произведению силы тока I на сопротивление R, то

$$IR + U_C = U_0. \tag{10}$$

Подставляя сюда значение силы тока I из (9) и учитывая, что напряжение U_C на конденсаторе в квазистационарных условиях в любой момент равно q/C, получаем

$$R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = U_0. \tag{11}$$

Это дифференциальное уравнение для функции $q(t)$ определяет зависимость заряда конденсатора от времени, если добавить

к нему начальное условие $q = 0$ при $t = 0$, выражающее отсутствие заряда в начальный момент. Уравнение (11) удобно переписать в несколько ином виде, учитывая, что приложенное напряжение U_0 равно отношению окончательного заряда конденсатора q_0 к его емкости C: $U_0 = q_0/C$. Тогда вместо (11) получим

$$\frac{dq}{dt} = \frac{q_0 - q}{RC}. \qquad (12)$$

Это уравнение легко привести к хорошо известному виду, если вместо заряда пластины q ввести другую неизвестную величину Q, характеризующую, насколько заряд пластины q в данный момент отличается от окончательного заряда q_0:

$$Q = q_0 - q. \qquad (13)$$

Дифференциальное уравнение процесса. Из определения (13) следует, что $dq/dt = -dQ/dt$. Поэтому уравнение (12) после замены (13) принимает вид

$$\frac{dQ}{dt} = -\frac{Q}{RC}. \qquad (14)$$

Экспоненциальная зависимость $q(t)$. Уравнение (14) означает, что скорость изменения недостающего заряда Q пропорциональна самому Q. Решением такого уравнения является экспоненциальная функция

$$Q(t) = A \exp(-t/RC). \qquad (15)$$

Постоянная A определяется с помощью начальных условий. В начальный момент конденсатор не заряжен ($q(0) = 0$). Поэтому недостающий заряд Q при $t = 0$ равен q_0. Таким образом, постоянная A в (15) равна окончательному заряду конденсатора q_0.

График зависимости $Q(t)$ показан штриховой линией на рис. 132. Из формулы (15) видно, что произведение RC равно промежутку времени τ, в течение которого значение $Q(t)$ уменьшается в e раз:

$$Q(\tau) = Q_0/e, \quad \tau = RC. \qquad (16)$$

Зависимость заряда конденсатора $q(t)$ от времени для рассматриваемого процесса получается из формулы (13) после подстановки в нее выражения для $Q(t)$ из (15)

$$q(t) = q_0 [1 - \exp(-t/\tau)]. \qquad (17)$$

График $q(t)$, показанный на рис. 132, можно построить как разность между постоянным значением окончательного заряда q_0 и графиком зависимости $Q(t)$.

Найденная зависимость заряда конденсатора от времени (17) позволяет найти силу тока в цепи при зарядке конденсатора в

любой момент времени. Дифференцируя (17) по времени, находим в соответствии с (9)

$$I(t) = \frac{q_0}{\tau} \exp(-t/\tau) = \frac{U_0}{R} \exp(-t/\tau). \tag{18}$$

При зарядке конденсатора сила тока при замыкании ключа в начальный момент скачком возрастает от нуля до значения, равного U_0/R, и в дальнейшем экспоненциально убывает со временем. Ее график имеет такой же вид, как и график $Q(t)$ на рис. 132.

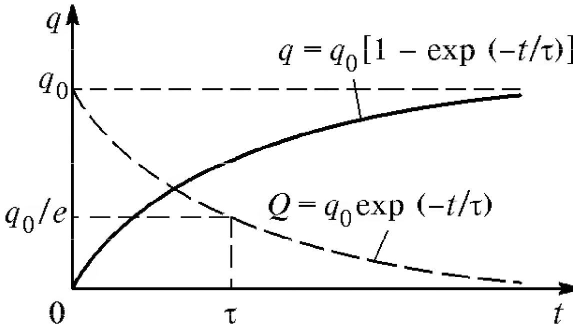


Рис. 132. График изменения заряда конденсатора

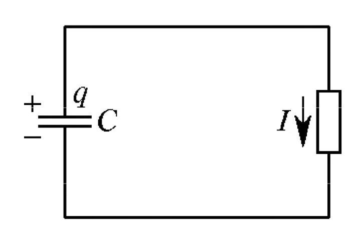


Рис. 133. При разрядке конденсатора значение силы тока I связано с зарядом верхней пластины соотношением $I = -dq/dt$

Процесс разрядки конденсатора. Совершенно аналогично можно рассмотреть процессы при разрядке конденсатора через активное сопротивление. Пусть в начальный момент времени конденсатор емкости C заряжен до напряжения U. При замыкании ключа в цепи возникает ток, который убывает по мере разрядки конденсатора (рис. 133). Протекание тока в цепи приводит к уменьшению заряда конденсатора. Поэтому если под q по-прежнему понимать заряд верхней пластины конденсатора, то силе тока I соответствует выражение

$$I = -\frac{dq}{dt}. \tag{19}$$

В любой момент времени напряжение на конденсаторе $U_C = q/C$ равно напряжению на сопротивлении $U_R = IR$. Поэтому с помощью (19) имеем

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{q}{RC}. \tag{20}$$

Соответствующее нашим начальным условиям ($q = q_0$ при $t = 0$) решение этого уравнения имеет вид

$$q(t) = q_0 \exp(-t/\tau), \quad \tau = RC. \tag{21}$$

Такой же экспоненциальный характер имеет и зависимость от времени силы тока в цепи при разрядке конденсатора:

$$I(t) = -\frac{dq}{dt} = \frac{q_0}{\tau} \exp(-t/\tau) = \frac{U_0}{R} \exp(-t/\tau). \tag{22}$$

Как видно из полученных соотношений (17) и (21) (или (18) и (22)), и процесс зарядки конденсатора, и процесс разрядки, строго говоря, продолжаются бесконечно долго. Поэтому для характеристики длительности таких процессов вводят время τ, в течение которого сила тока I изменяется в $e = 2{,}72$ раза. Для электрической цепи, содержащей конденсатор и сопротивление, таким параметром является величина

$$\tau = RC. \tag{23}$$

В любой реальной системе переходный процесс продолжается в течение конечного промежутка времени, так как говорить о таком процессе имеет смысл только до тех пор, пока рассматриваемая величина не уменьшится до значения, соответствующего уровню тепловых флуктуаций в системе.

Использованное при рассмотрении процессов зарядки и разрядки конденсатора условие квазистационарности связано с возможностью пренебречь временем распространения электромагнитного поля вдоль цепи по сравнению с τ. Если длину цепи обозначить через l, то условие квазистационарности принимает вид

$$l/c \ll \tau = RC. \tag{24}$$

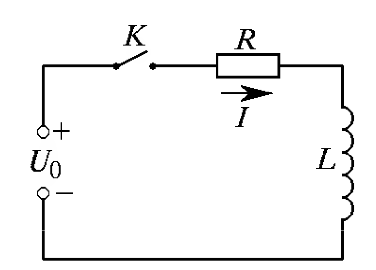


Рис. 134. К расчету силы тока в цепи при замыкании ключа K

Ток в цепи с индуктивностью. Аналогично можно рассмотреть процесс установления тока в цепи, содержащей резистор R и катушку индуктивности L (рис. 134). При замыкании ключа K в цепи возникает ток, быстрому нарастанию которого препятствует ЭДС самоиндукции, возникающая в катушке индуктивности. Ток нарастает до тех пор, пока не достигнет постоянного значения $I_0 = U_0/R$.

Выражение для силы тока $I(t)$ в каждый момент можно записать, используя закон Ома для неоднородного участка цепи:

$$I = \frac{U_0 + \mathscr{E}}{R}. \tag{25}$$

Поскольку ЭДС самоиндукции $\mathscr{E}$ выражается соотношением $\mathscr{E} = -dI/dt$, то равенство (25) можно записать в виде

$$L\frac{dI}{dt} + RI = U_0. \tag{26}$$

Равенство (26) можно было написать и сразу, учитывая, что напряжение U_0 на концах последовательной цепи равно сумме напряжений на отдельных ее элементах, а напряжение на индуктивности в каждый момент времени компенсирует возникающую в катушке ЭДС самоиндукции.

Соотношение (26) представляет собой дифференциальное уравнение для силы тока $I(t)$. Оно совершенно аналогично урав-

нению (11) для заряда $q(t)$, поэтому и решать его можно таким же способом. Представим U_0 как I_0R и перепишем (26) в виде

$$\frac{dI}{dt} = (I_0 - I)\,\frac{R}{L}. \qquad (27)$$

Это уравнение аналогично (12). Учитывая начальное условие $I = 0$ при $t = 0$, можно записать решение уравнения (27) в виде, подобном (17):

$$I = I_0\left[1 - \exp\left(-\frac{R}{L}t\right)\right] = I_0\left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right], \qquad (28)$$

где характерное время τ установления тока в цепи, содержащей сопротивление и индуктивность, дается соотношением

$$\tau = \frac{L}{R}. \qquad (29)$$

Для процессов в цепях с индуктивностью характерны те же моменты, которые отмечались выше для цепей с емкостью. В частности, условие квазистационарности в цепи длиной l имеет вид

$$l/c \ll \tau = \frac{L}{R}. \;\blacktriangle \qquad (30)$$

- Найдите время, по прошествии которого на пластинах разряжающегося конденсатора останется только одна тысячная часть первоначального заряда, если $\tau = RC = 1$ с.
- При выполнении какого условия процесс зарядки (или разрядки) конденсатора можно считать квазистационарным?
- Почему реальный процесс зарядки конденсатора имеет конечную длительность, хотя определенная выражением (18) сила зарядного тока обращается в нуль только при $t \to \infty$?
- Какую роль играют начальные условия при решении дифференциальных уравнений, описывающих квазистационарные процессы в цепях, содержащих конденсаторы или индуктивности?
- Из чего следует исходить при формулировке начальных условий к дифференциальным уравнениям, т. е. при задании значений изменяющихся со временем величин при $t = 0$ в конкретных электрических цепях?

IV. ПЕРЕМЕННЫЙ ЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ ТОК

Широкое использование синусоидального переменного тока в технике и народном хозяйстве связано со многими его преимуществами, в частности с удобством его преобразования с помощью трансформаторов и с исключительной простотой повсеместно применяемых асинхронных двигателей.

Почему из всех возможных форм периодических переменных токов наибольшее распространение получили переменные токи именно синусоидальной формы? Дело в том, что синусоидальные токи по сравнению со всеми другими токами позволяют наиболее просто и экономично осуществлять передачу, распределение, преобразование и использование электрической энергии.

§ 22. Цепи переменного тока. Закон Ома

Только в случае синусоидальных токов сохраняются неизменными формы кривых зависимости от времени напряжения и токов на всех участках линейной электрической цепи, т. е. цепи, содержащей резисторы, конденсаторы, катушки индуктивности. В цепи, содержащей нелинейные элементы — диоды, транзисторы, электронные лампы и т. п. — форма этих кривых не сохраняется при любой, в том числе и синусоидальной, зависимости от времени подаваемого напряжения.

Прямоугольные импульсы в *RC*-цепочке. Рассмотрим следующую простую линейную цепь, состоящую из конденсатора C и резистора R (рис. 135). Посмотрим, что будет на выходе этой цепи, если на ее вход подавать напряжение в виде прямоугольных импульсов.

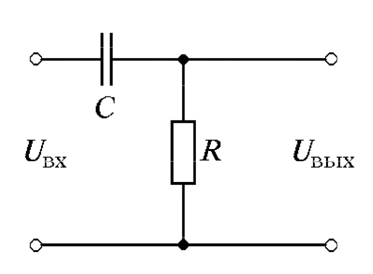


Рис. 135. *RC*-цепочка

Начало каждого прямоугольного импульса соответствует подключению к цепи источника постоянного напряжения на время, равное длительности импульса. При этом в цепи скачком возникает ток, который постепенно уменьшается по мере того, как конденсатор заряжается. Время, в течение которого продолжается процесс зарядки конденсатора, определяется произведением $\tau = RC$. Если это время меньше длительности подаваемого на вход прямоугольного импульса, то ток

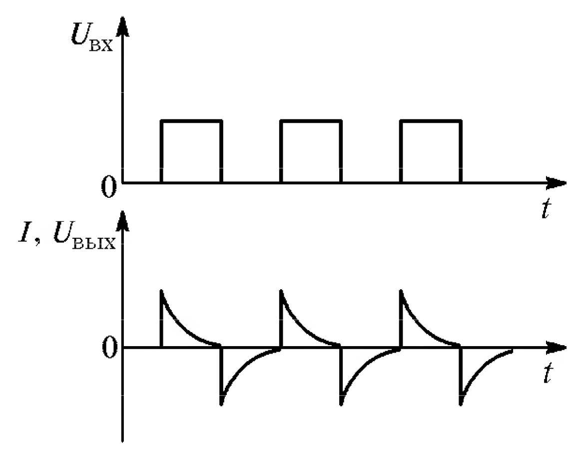


Рис. 136. Преобразование прямоугольных импульсов напряжения RC-цепочкой

зарядки прекратится раньше, чем закончится прямоугольный импульс. Именно этот случай изображен на рис. 136.

В момент прихода заднего фронта прямоугольного импульса подаваемое напряжение скачком обращается в нуль. Но этого можно добиться только путем короткого замыкания входных клемм схемы. Цепь, содержащая R и C, становится короткозамкнутой, и конденсатор C разряжается через сопротивление R. Направление тока разрядки противоположно зарядному току, поэтому выходное напряжение на сопротивлении R имеет противоположную полярность (рис. 136).

Таким образом, форма выходного напряжения оказывается совершенно иной, чем форма входного напряжения.

Синусоидальное напряжение в RC-цепочке. Посмотрим теперь, что получится, если на вход той же RC-цепочки подать синусоидальное напряжение

$$U(t) = U_0 \cos \omega t. \qquad (1)$$

Будем считать, что это напряжение действует в течение достаточно большого по сравнению с $\tau = RC$ промежутка времени, так что все переходные процессы к рассматриваемому моменту уже закончились. Тогда ток в цепи будет изменяться по синусоидальному закону с той же частотой ω, причем между приложенным напряжением и током будет некоторый сдвиг по фазе.

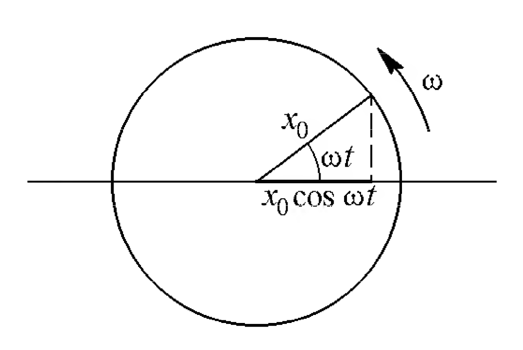


Рис. 137. Изменяющаяся по синусоидальному закону величина $x(t) = x_0 \cos \omega t$ может быть представлена как проекция вращающегося вектора длины x_0

Чтобы найти амплитуду этого тока и сдвиг по фазе, воспользуемся тем обстоятельством, что мгновенное значение любой изменяющейся по синусоидальному закону величины $x(t) = x_0 \cos \omega t$ можно представить как проекцию вектора длиной x_0 на некоторое заранее выбранное направление, причем сам вектор равномерно вращается в плоскости с угловой скоростью ω, равной циклической частоте, а длина вектора равна амплитудному значению x_0 соответствующей величины (рис. 137). С помощью такого представления каждой исследуемой схеме можно сопоставить определенную векторную диаграмму.

Векторные диаграммы. В RC-цепочке, показанной на рис. 135, сумма мгновенных значений напряжений на конденсаторе C и резисторе R равна значению приложенного напряжения в тот же момент времени:

$$U = U_R + U_C. \tag{2}$$

Если цепочка не нагружена, т. е. к выходу ничего не подключено, то сила тока через конденсатор C и резистор R в каждый момент времени одинакова. Этой схеме можно сопоставить векторную диа-

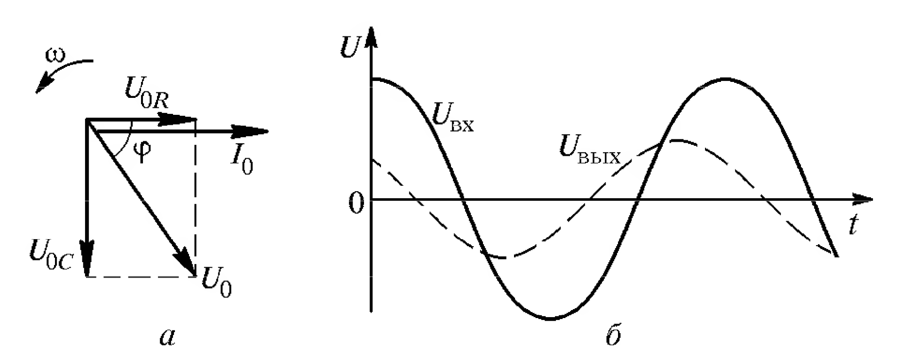


Рис. 138. Векторная диаграмма для RC-цепочки (*а*) и графики входного и выходного напряжений (*б*)

грамму, изображенную на рис. 138*а*. Вся система векторов вращается как целое против часовой стрелки с угловой скоростью ω вокруг оси, перпендикулярной плоскости рисунка.

Поскольку ток в цепи находится в фазе с напряжением U_R и опережает на π/2 напряжение на емкости U_C, то при выбранном направлении вращения векторы $\mathbf{I}_0$ и $\mathbf{U}_{0R}$, направленные в одну сторону, опережают на π/2 вектор $\mathbf{U}_{0C}$. Очевидно, что вектор $\mathbf{U}_0$, изображающий приложенное напряжение $U_{вх}$, должен быть равен, как видно из (2), векторной сумме $\mathbf{U}_{0R}$ и $\mathbf{U}_{0C}$. Из рис. 138 видно, что

$$U_0^2 = U_{0R}^2 + U_{0C}^2, \qquad \operatorname{tg} \varphi = +U_{0C}/U_{0R}. \tag{3}$$

Используя связь между амплитудным значением силы тока I_0 и амплитудными значениями U_{0R} и U_{0C} напряжений на резисторе и конденсаторе

$$U_{0R} = I_0 R, \qquad U_{0C} = \frac{I_0}{\omega C},$$

с помощью (3) находим

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (1/\omega C)^2}}, \qquad \operatorname{tg} \varphi = \frac{1/\omega C}{R}. \tag{4}$$

Если приложенное напряжение дается формулой (1), то сила тока в цепи определяется выражением

$$I = I_0 \cos(\omega t + \varphi), \tag{5}$$

где I_0 и φ определяются формулами (4). Это значит, что выходное напряжение $U_{\text{вых}}$ (рис. 135), совпадающее с напряжением на резисторе R, как и подаваемое напряжение $U_{\text{вх}}$, будет синусоидальным, но опережающим его по фазе на угол φ (рис. 138*б*). Из второй формулы (4) следует, что этот сдвиг по фазе зависит не только от соотношения между C и R, но и от частоты ω входного напряжения.

Подчеркнем еще раз, что для сохранения формы передаваемого напряжения необходимо использовать именно синусоидальный переменный ток.

Проиллюстрированный на примере RC-цепочки метод векторных диаграмм можно применять для исследования любых линейных цепей переменного тока.

Последовательная RLC-цепь. Рассмотрим произвольную последовательную цепь переменного тока, содержащую активное сопротивление R, емкость C и индуктивность L (рис. 139). Будем считать, что на вход этой цепи подано синусоидальное напряжение, даваемое формулой (1). В последовательной цепи квазистационарного переменного тока сила тока I в каждый момент времени во всех участках цепи одинакова. Сумма мгновенных значений напряжений на сопротивлении R, емкости C и индуктивности L равна значению приложенного напряжения U в тот же момент времени:

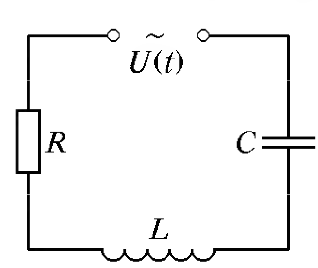


Рис. 139. Последовательная RLC цепь

$$U = U_R + U_L + U_C. \tag{6}$$

Этой схеме можно сопоставить векторную диаграмму, изображенную на рис. 140*а*. Каждой величине — току $I(t)$, напряжениям на сопротивлении R, емкости C и индуктивности L — сопоставляются векторы, длина каждого из которых равна амплитудному значению соответствующей величины. Вся система векторов вращается как целое с угловой скоростью ω. Мгновенные значения величин I, U_R, U_L и U_C получаются проецированием соответствующих векторов на заранее выбранное фиксированное направление NN. Поскольку, как мы видели, ток в цепи изменяется в фазе с напряжением U_R, отстает на $\pi/2$ от напряжения на индуктивности U_L и опережает на $\pi/2$ напряжение на емкости U_C, то при указанном направлении вращения вектор U_{0L} опережает векторы I_0 и U_{0R} на $\pi/2$, которые в свою очередь опережают на $\pi/2$ вектор U_{0C}.

Вектор, изображающий приложенное напряжение, равен сумме векторов U_{0R}, U_{0L} и U_{0C}, так как проекция результирующего вектора, которая определяет мгновенное значение приложенного напряжения U, равна сумме проекций составляющих векторов, равных мгновенным значениям напряжений U_R, U_L и U_C, в полном соответствии с

равенством (6) (рис. 140*б*). Из этого рисунка видно, что

$$U_0^2 = U_{0R}^2 + (U_{0L} - U_{0C})^2, \qquad \operatorname{tg}\varphi = \frac{U_{0L} - U_{0C}}{U_{0R}}. \tag{7}$$

Используя связь между амплитудным значением тока I_0 и амплитудными значениями напряжений на отдельных элементах цепи:

$$U_{0R} = I_0 R, \qquad U_{0C} = \frac{I_0}{\omega C}, \qquad U_{0L} = I_0 \omega L,$$

с помощью (7) получаем

$$I = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}, \tag{8}$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\omega L - 1/(\omega C)}{R}. \tag{9}$$

Итак, если приложенное напряжение $U(t) = U_0 \cos \omega t$, то ток в цепи $I = I_0 \cos(\omega t - \varphi)$, где I_0 и φ определяются формулами (8) и (9). Ток в цепи, как и напряжение, меняется по синусоидальному закону, но между током и напряжением существует сдвиг по фазе, равный φ.

С помощью векторной диаграммы на рис. 140*б* теперь легко написать выражения для мгновенных напряжений на отдельных элементах схемы:

$$U_R = I_0 R \cos(\omega t - \varphi),$$

$$U_L = I_0 \omega L \cos\left(\omega t - \varphi + \frac{\pi}{2}\right),$$

$$U_C = \frac{I_0}{\omega C} \cos\left(\omega t - \varphi - \frac{\pi}{2}\right).$$

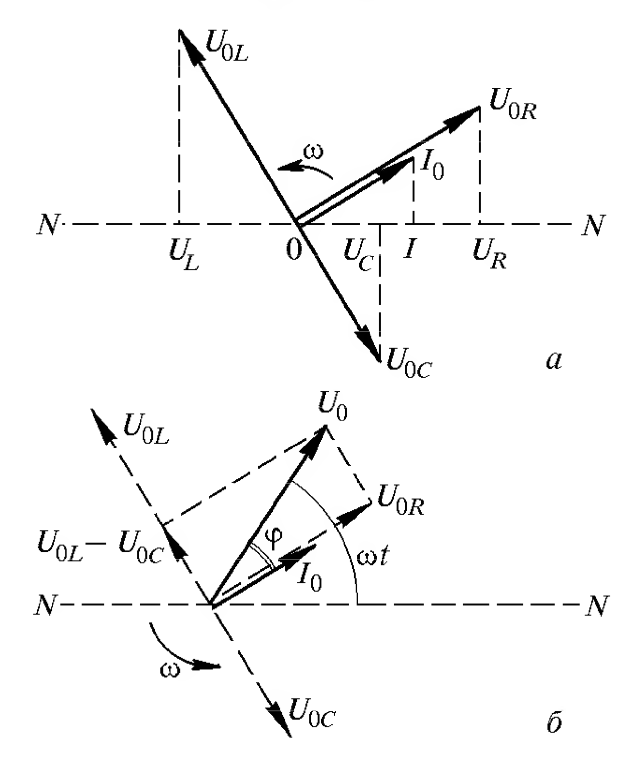


Рис. 140. Векторная диаграмма для последовательной *RLC*-цепи (*а*); к определению связи между приложенным напряжением и током в цепи (*б*)

Выясним, что покажет вольтметр, если его подключить к какому-либо из элементов схемы. Произведя измерения напряжений на всех элементах схемы по отдельности, можно убедиться, что сумма этих напряжений всегда больше действующего значения подаваемого на схему напряжения. Более того, напряжение на любом из реактивных сопротивлений может быть гораздо больше подаваемого напряжения. Напряжение же на активном сопротивлении никогда не бывает больше подаваемого напряжения.

Резонанс напряжений. Если при измерении напряжений на реактивных элементах напряжения окажутся равными друг другу, то это значит, что равны реактивные сопротивления: $\omega L = 1/(\omega C)$. Такую ситуацию называют *резонансом напряжений* в цепи переменного тока. При этом напряжение на активном сопротивлении равно приложенному внешнему напряжению. Сопротивление всей последовательной цепи при резонансе напряжений становится чисто активным и равным R. Сдвиг фаз между приложенным напряжением и током в этом случае отсутствует.

При резонансе напряжений дважды за период колебаний происходят взаимные превращения энергии электрического поля конденсатора в энергию магнитного поля катушки и обратно. Энергия, подводимая к контуру из внешней цепи, целиком идет на компенсацию джоулевых потерь в активном сопротивлении контура.

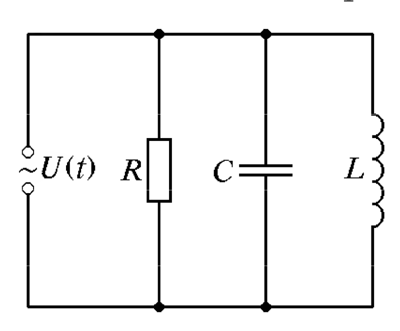


Рис. 141. Параллельное соединение R, L и C

Параллельная RLC-цепь. Рассмотрим цепь переменного тока, содержащую параллельно соединенные активное сопротивление R, индуктивность L и емкость C (рис. 141), на которую подается переменное синусоидальное напряжение $U(t) = U_0 \cos \omega t$. Как и в случае последовательного соединения элементов, эту цепь удобно исследовать с помощью векторных диаграмм. Напряжение на всех параллельно соединенных элементах одинаково и равно приложенному напряжению $U(t)$. Мгновенное значение квазистационарного тока в неразветвленной части цепи $I(t)$ равно алгебраической сумме токов в параллельных участках:

$$I = I_R + I_C + I_L. \tag{10}$$

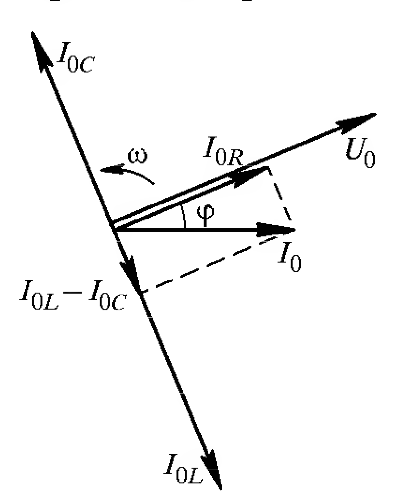


Рис. 142. Векторная диаграмма для параллельной RLC-цепи

Поскольку ток через сопротивление R находится в фазе с приложенным напряжением, ток в ветви, содержащей емкость, опережает напряжение на $\pi/2$, а ток через индуктивность отстает от напряжения на $\pi/2$, то векторная диаграмма, соответствующая этой цепи, имеет вид, изображенный на рис. 142. Учитывая связь между амплитудными значениями токов в различных элементах и амплитудным значением приложенного напряжения:

$$U_0 = I_{0R} R = I_{0C}/\omega C = I_{0L} \omega L,$$

с помощью векторной диаграммы на рис. 142 получаем следующие выражения для амплитуды тока в неразветвленной части цепи и для

сдвига по фазе между приложенным напряжением и этим током:

$$I_0 = U_0\sqrt{\frac{1}{R^2} + \left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right)^2}, \tag{11}$$

$$\mathrm{tg}\varphi = R\left(\frac{1}{\omega L} - \omega C\right). \tag{12}$$

Таким образом, ток в неразветвленной части цепи равен $I = I_0 \cos(\omega t - \varphi)$, где I_0 и φ определяются формулами (11) и (12). Векторная диаграмма дает также возможность написать выражение для мгновенных значений тока в отдельных ветвях цепи:

$$I_R = \frac{U_0}{R}\cos\omega t, \quad I_L = \frac{U_0}{\omega L}\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right), \quad I_C = U_0\omega C\cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Резонанс токов. При равенстве емкостного и индуктивного сопротивлений, т. е. при $\omega L = 1/\omega C$, сдвиг фаз между током в неразветвленной части цепи и напряжением обращается в нуль. Токи I_C и I_L при этом равны по величине, и так как они находятся в противофазе, то ток в неразветвленной части становится равным току I_R через активное сопротивление.

Заметим, что токи I_C и I_L в отдельных ветвях цепи могут значительно превосходить ток в проводящих проводах. Такая ситуация носит название *резонанса токов.* При этом, как и в последовательной RLC-цепи при резонансе напряжений, происходит обмен энергией между электрическим и магнитным полями, сосредоточенными в емкости и индуктивности, а источник питания только компенсирует потери энергии за счет выделения джоулевой теплоты на сопротивлении R. Если сопротивление R вообще убрать из цепи ($R \to \infty$), то энергетические потери в такой идеализированной схеме отсутствуют и ток в подводящих проводах равен нулю, хотя в контуре, состоящем из L и C, ток может быть сколь угодно большим. В этом случае на резонансной частоте $\omega = 1/\sqrt{LC}$ полное реактивное сопротивление контура неограниченно возрастает.

Резонанс токов, наряду с резонансом напряжений, широко используется в технике. В качестве примера можно указать на использование резонансных свойств RLC-цепи для выделения сигнала нужной частоты в антенне радиоприемника при настройке на определенную радиостанцию. Другим важным примером использования резонанса токов является индукционная печь, в которой нагревание и плавление металлов производятся вихревыми токами. Параллельно нагревающей катушке, в которую помещается разогреваемый металл, присоединяют конденсатор и подбирают его емкость так, чтобы получить на частоте питающего генератора резонанс токов. Тогда через подводящие провода и генератор пойдет сравнительно небольшой ток, который может быть во много раз меньше тока в LC-контуре, образованном конденсатором и нагревающей катушкой.

- В чем заключаются достоинства переменного тока синусоидальной формы?
- Как преобразуются прямоугольные импульсы RC-цепочкой? Рассмотрите случай, когда длительность импульсов много больше $\tau = RC$ и когда она много меньше τ.
- Поясните идею метода векторных диаграмм для расчета цепей синусоидального переменного тока?
- Поясните, почему на векторной диаграмме на рис. 137 вектор, изображающий приложенное напряжение, равен сумме векторов, изображающих напряжения на сопротивлении R и емкости C.
- Рассмотрите последовательную RL-цепочку и постройте соответствующую ей векторную диаграмму. Найдите сдвиг фаз между приложенным напряжением и током в цепи. Будет ли ток отставать от напряжения или опережать его?
- Если в общей формуле (9) для последовательной RLC-цепи положить $L = 0$, то для сдвига фаз получается выражение, отличающееся знаком от формулы (4) для RC-цепи. Как по-вашему, с чем связано это различие?
- При каких соотношениях между параметрами последовательной RLC-цепи ток в ней опережает по фазе приложенное напряжение, а при каких — отстает от него?
- Поясните, почему на векторной диаграмме для параллельной RLC-цепи складываются токи, а не напряжения?
- Что такое резонанс напряжений и резонанс токов? Какие энергетические превращения при этом происходят в цепи?
- Можно ли применять векторные диаграммы для нахождения тока сразу после приложения переменного напряжения?

△ **Закон Ома.** Закон Ома — это утверждение о пропорциональности между током и напряжением в цепи.

Рассмотрим для простоты участок цепи, содержащий последовательно соединенные резистор R, конденсатор C и катушку индуктивности L. Такая цепь была подробно рассмотрена выше. Как было показано, вид закона Ома имеет только соотношение между амплитудными значениями тока и напряжения в цепи:

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}. \tag{13}$$

Наличие определенного сдвига по фазе φ между током и напряжением приводит к тому, что мгновенные значения тока и напряжения не пропорциональны друг другу и мы не можем с помощью вещественных чисел представить ток в цепи как отношение приложенного напряжения к сопротивлению.

Однако это можно легко сделать, используя комплексные числа. Разумеется, ток, напряжение и сопротивление цепи, как и любые другие измеряемые на опыте физические величины, должны выражаться вещественными числами. Мгновенные значения инте-

ресующих нас физических величин получаются в результате проецирования векторной диаграммы, изображенной на рис. 140. Но вектор на плоскости можно задать с помощью комплексного числа. Будем фиксировать мгновенное значение каждого из вращающихся векторов на рис. 140 заданием некоторого комплексного числа. В частности, вектору, изображающему ток, сопоставим комплексное число $\tilde{I}$, вектору, изображающему напряжение, — комплексное число $\tilde{U}$. Поскольку угол φ между этими вращающимися векторами постоянен, комплексные числа $\tilde{U}$ и $\tilde{I}$, сопоставляемые этим векторам, можно связать равенством $\tilde{I} = \tilde{U}/Z$, где Z — некоторое постоянное комплексное число.

Это соотношение формально имеет вид закона Ома для участка цепи, причем комплексное число Z как-то характеризует сопротивление этого участка цепи переменному току. Найдем вид этого числа. Запишем выражения для $\tilde{U}$ и $\tilde{I}$ в тригонометрической форме:

$$\begin{aligned} \tilde{U} &= U_0\,(\cos\omega t + i\sin\omega t),\\ \tilde{I} &= I_0\left[\cos(\omega t - \varphi) + i\sin(\omega t - \varphi)\right], \end{aligned} \tag{14}$$

и учтем, что разность аргументов этих комплексных чисел равна постоянному сдвигу фаз φ между напряжением и током. Используя равенства (14) и правило деления комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме, получим

$$Z = \frac{\tilde{U}}{\tilde{I}} = \frac{U_0}{I_0}\,(\cos\varphi + i\sin\varphi) = Z_0(\cos\varphi + i\sin\varphi). \tag{15}$$

Таким образом, модуль Z_0 комплексного числа Z, как видно из выражений (13) и (15), равен

$$Z_0 = \frac{U_0}{I_0} = \sqrt{R^2 + \left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)^2},$$

а его аргумент φ представляет собой сдвиг фаз между напряжением и током и определяется формулой (9). Переходя от тригонометрической к алгебраической форме комплексного числа и учитывая, что

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\operatorname{Im} Z}{\operatorname{Re} Z}, \qquad Z_0 = \sqrt{(\operatorname{Re} Z)^2 + (\operatorname{Im} Z)^2},$$

получаем для Z выражение

$$Z = R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right). \tag{16}$$

Комплексное число Z полностью характеризует сопротивление рассматриваемого участка цепи синусоидальному переменному току с частотой ω. Оно носит название *комплексного сопротивления* или *импеданса* цепи. Зная Z, легко найти амплитуду тока и сдвиг по фазе между напряжением и током.

Формула (16) показывает, что импеданс последовательной цепи можно получить, если элементам схемы R, L и C сопоставить комплексные сопротивления переменному току по следующему правилу:

$$R \to R, \qquad L \to i\omega L, \qquad C \to \frac{1}{i\omega C}, \qquad (17)$$

после чего сложить эти «сопротивления» по правилу сложения сопротивлений в последовательной цепи.

Полученный рецепт имеет совершенно общий характер и справедлив для любой разветвленной цепи: всем элементам сопоставляются комплексные сопротивления по правилу (17), которые затем складываются по правилам для цепей постоянного тока.

Отметим, что формулы (14) и (15) можно записать компактнее, если воспользоваться формулой Эйлера

$$e^{i\alpha} = \cos\alpha + i\sin\alpha.$$

При этом, очевидно, $\tilde{U} = U_0\, e^{i\omega t}$, $\tilde{I} = I_0\, e^{i(\omega t - \varphi)}$ и

$$Z = \tilde{U}/\tilde{I} = Z_0\, e^{i\varphi}. \ \blacktriangle$$

- Сформулируйте основную идею использования комплексных чисел для анализа цепей синусоидального переменного тока.
- Сформулируйте правила расчета произвольной разветвленной цепи, содержащей RLC-элементы.
- Рассмотрите с помощью комплексных чисел параллельную RLC-цепь и получите формулы (11) и (12).

§ 23. Работа и мощность переменного тока. Передача электроэнергии

Как мы видели, в цепи синусоидального переменного тока, вообще говоря, возникает сдвиг по фазе между приложенным напряжением и током:

$$U(t) = U_0 \cos\omega t, \qquad I(t) = I_0 \cos(\omega t - \varphi). \qquad (1)$$

Мгновенная мощность. Сдвиг фаз φ зависит от соотношения между активным и реактивными сопротивлениями и тем самым от частоты ω. Поскольку напряжение и ток в цепи изменяются с частотой ω, то при подсчете работы тока нужно рассматривать настолько малый промежуток времени Δt, чтобы значения напряжения и тока можно было считать постоянными:

$$\Delta A = I(t)U(t)\Delta t. \qquad (2)$$

Отсюда получается следующее выражение для мгновенной мощности тока:

$$P(t) = \Delta A/\Delta t = I(t)\, U(t). \qquad (3)$$

Подставив сюда значения $I(t)$ и $U(t)$ из (1), получаем

$$P(t) = U_0 I_0 \cos \omega t \cdot \cos (\omega t - \varphi). \qquad (4)$$

Воспользовавшись тригонометрическим тождеством

$$\cos \alpha \cdot \cos \beta = \frac{1}{2} [\cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta)],$$

перепишем (4) в следующем виде:

$$P(t) = \frac{1}{2} I_0 U_0 [\cos \varphi + \cos (2\omega t - \varphi)]. \qquad (5)$$

Выражение для мгновенной мощности (5) состоит из двух слагаемых: одно из них не зависит от времени, а второе осциллирует с удвоенной частотой 2ω. Это значит, что дважды за каждый период изменения приложенного напряжения изменяется направление потока энергии: в течение какой-то части периода энергия поступает в цепь от источника переменного напряжения, а в течение другой части возвращается обратно. Средний за период поток энергии положителен, т. е. энергия поступает в цепь от источника.

Средняя мощность. Действующие значения. Если интересоваться работой переменного тока за промежуток времени, сравнимый с периодом $T = 2\pi/\omega$, то в выражении (15) для мощности следует учитывать оба слагаемых. При вычислении работы, совершаемой током за промежуток времени, значительно превышающий период, вклад второго слагаемого будет пренебрежимо малым. В этом случае вместо (5) можно пользоваться выражением для средней мощности P:

$$P = \frac{1}{2} I_0 U_0 \cos \varphi. \qquad (6)$$

Часто эту формулу записывают в виде

$$P = IU \cos \varphi, \qquad (7)$$

где I и U — так называемые *действующие значения* силы тока и напряжения, в $\sqrt{2}$ раз меньшие соответствующих амплитудных значений:

$$I = I_0/\sqrt{2}, \quad U = U_0/\sqrt{2}. \qquad (8)$$

Использование действующих значений вместо амплитудных удобно потому, что в нагрузке с чисто активным сопротивлением, где $\varphi = 0$, выражение (7) для мощности будет таким же, как и для постоянного тока.

Потери в линиях передачи. Потребителю обычно подается напряжение определенной величины U, поэтому одна и та же мощность P будет потребляться при разных значениях тока в цепи I в зависимости от сдвига фазы между током и напряжением. При

малых значениях $\cos\varphi$ ток должен быть большим, что приводит к большим тепловым потерям в подводящих проводах линии передачи.

Если r — сопротивление линии передачи, то рассеиваемая мощность тепловых потерь в линии P_1 равна I^2r. Выражая ток в цепи с помощью (7), для P_1 получаем

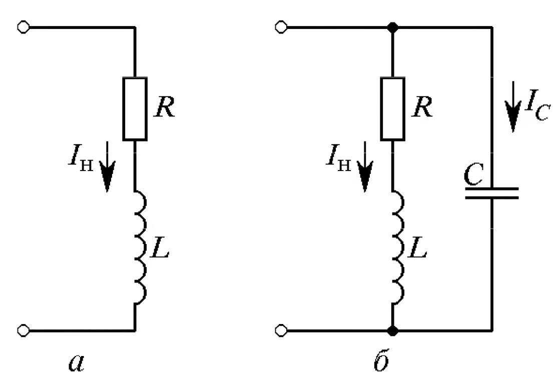


Рис. 143. Эквивалентная схема потребителя с индуктивной нагрузкой (*а*) и включение вспомогательного конденсатора для увеличения $\cos\varphi$ (*б*)

$$P_1 = \frac{P^2}{U^2\cos^2\varphi}\, r. \tag{9}$$

Для уменьшения потерь следует добиваться как можно меньшего сдвига фазы между током и напряжением в нагрузке.

Большинство современных потребителей электрической энергии синусоидального тока представляют собой нагрузки индуктивного характера, токи в которых отстают по фазе от напряжения источника питания. Эквивалентную схему такого потребителя можно изобразить в виде последовательно соединенных активного сопротивления R и индуктивности L (рис. 143*а*). Соответствующая векторная диаграмма показана на рис. 144*а*. Ток $I_н$ через нагрузку отстает от приложенного напряжения на определенный угол $\varphi_н$. Потребляемая нагрузкой мощность согласно (7) равна

$$P = \frac{1}{2}\, U_0 I_{0н} \cos\varphi_н. \tag{10}$$

Из этой формулы видно, что при напряжении U_0 такую же мощность можно было бы получить и при любом другом токе I_0, таком,

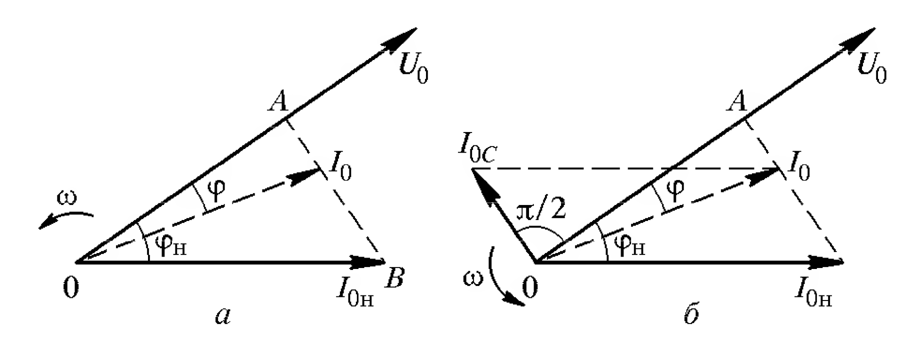


Рис. 144. Векторные диаграммы для цепей, изображенных на рис. 143

что изображающий его вектор (показанный штриховой линией на рис. 144*а*) оканчивается на перпендикуляре AB, опущенном из конца $I_{0н}$ на направление U_0, так как при этом $I_0\cos\varphi = I_{0н}\cos\varphi_н$. Но если $\varphi < \varphi_н$, то $I_0 < I_{0н}$ и при той же мощности тепловые потери в подводящих проводах будут меньше.

Уменьшение потерь. Как же добиться того, чтобы сдвиг фаз между напряжением и током в цепи уменьшился? Легко сообразить, что для этого можно подсоединить параллельно нагрузке вспомогательный конденсатор (рис. 143*б*). Векторная диаграмма в этом случае будет иметь вид, изображенный на рис. 144*б*. Векторы, изображающие приложенное напряжение U и ток через нагрузку $I_{\text{н}}$, останутся неизменными, а полный ток в неразветвленной цепи, равный сумме токов через нагрузку и вспомогательный конденсатор, будет изображаться вектором I_0. Подбирая емкость конденсатора, можно добиться того, чтобы сдвиг по фазе принял заданное значение φ.

Из рис. 144*б* видно, что длина вектора I_{0C} равна

$$I_{0C} = |OA| \, (\operatorname{tg} \varphi_{\text{н}} - \operatorname{tg} \varphi). \tag{11}$$

Но $|OA| = I_{0\text{н}} \cos \varphi_{\text{н}}$, и с помощью (10) находим $|OA| = 2P/U_0$. Амплитудное значение тока в конденсаторе I_{0C} связано с амплитудным значением подаваемого напряжения формулой $I_{0C} = U_0 \omega C$. Подставляя $|OA|$ и I_{0C} в (11), находим

$$C = \frac{2P}{U_0^2 \omega} \, (\operatorname{tg} \varphi_{\text{н}} - \operatorname{tg} \varphi). \tag{12}$$

Таким образом, существует достаточно простой и эффективный способ снижения потерь в линиях передачи энергии переменного тока, связанных с реактивным характером сопротивления нагрузки: подключение конденсатора к индуктивной нагрузке позволяет получить равное нулю значение сдвига фаз φ.

Высоковольтные линии передачи. Но даже в том случае, когда сопротивление нагрузки является чисто активным и сдвиг фаз между напряжением и током отсутствует, т. е. $\cos \varphi = 1$, тепловые потери в линии передачи все равно неизбежны. Можно ли их каким-либо способом уменьшить? Ответ на этот вопрос дает формула (9). Из нее видно, что при заданном значении передаваемой потребителю мощности P уменьшить тепловые потери в линии можно, либо уменьшая сопротивление R проводов линии передачи, либо повышая напряжение U переменного тока, подаваемого потребителю. Уменьшение сопротивления линии в настоящее время возможно лишь до известных пределов, поэтому до создания эффективных сверхпроводящих линий электропередачи с потерями приходится бороться повышением напряжения.

Трансформатор. Для преобразования напряжения на электростанциях и у потребителей используются *трансформаторы* (рис. 145). Трансформатор имеет сердечник замкнутой формы из магнитомягкого (легко перемагничиваемого) материала, который несет на себе две обмотки: первичную и вторичную. Концы первичной обмотки (вход трансформатора) подключают к сети переменно-

го тока, а концы вторичной обмотки (выход) — к потребителю электрической энергии. ЭДС электромагнитной индукции, возникающая во вторичной обмотке, пропорциональна числу витков в ней.

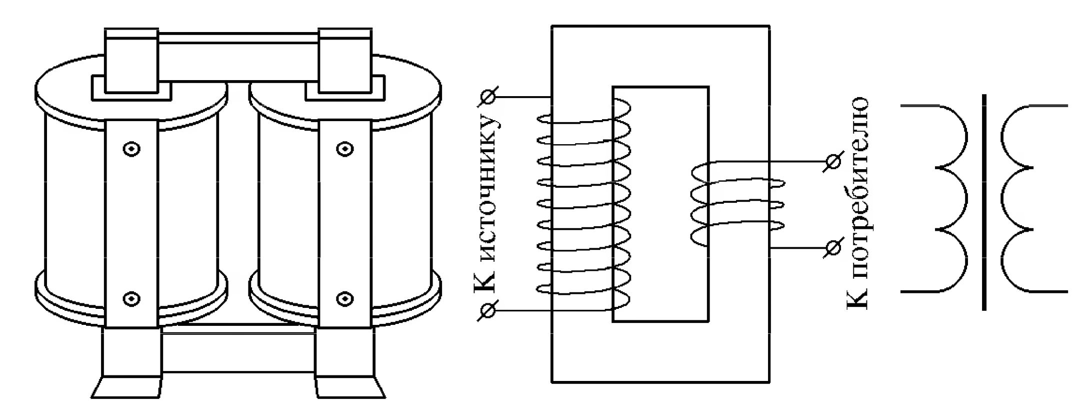


Рис. 145. Трансформатор: общий вид, схематическое устройство и условное изображение на схемах

Поэтому, изменяя это число витков, можно изменять в широких пределах напряжение на выходе трансформатора.

Рассмотрим принцип действия трансформатора. Пусть сначала вторичная обмотка трансформатора разомкнута, а на первичную подается переменное синусоидальное напряжение. Это режим холостого хода. Как и всякую катушку индуктивности, первичную обмотку трансформатора можно рассматривать как последовательно соединенные индуктивность L и активное сопротивление R. Напряжение U_L на индуктивном сопротивлении $R_L = \omega L$ первичной обмотки опережает по фазе ток и, следовательно, напряжение U_R на ее активном сопротивлении на угол, равный $\pi/2$. Поэтому амплитудные значения поданного на первичную обмотку напряжения U_{01} и напряжений на R и L связаны соотношением

$$U_{01} = \sqrt{U_{0R}^2 + U_{0L}^2}\,. \tag{13}$$

Разумеется, непосредственно измерить U_L и U_R по отдельности невозможно, так как первичная обмотка, строго говоря, не есть последовательно соединенные индуктивность L и активное сопротивление R: каждый элемент обмотки обладает одновременно индуктивностью и сопротивлением. Это так называемая цепь с распределенными параметрами. Но при расчете можно заменить реальную обмотку на цепь с сосредоточенными параметрами — катушку индуктивности и резистор, соединенные последовательно, поскольку через каждый элемент исходной цепи идет один и тот же ток.

Напряжение на индуктивности U_L в каждый момент времени компенсирует возникающую в первичной обмотке ЭДС самоиндукции $\mathscr{E}_1$, поэтому

$$U_L = -\mathscr{E}_1. \tag{14}$$

Если весь магнитный поток, создаваемый током первичной обмотки, целиком, т. е. без рассеяния, пронизывает вторичную обмот-

ку, то индуцируемая в каждом витке вторичной обмотки ЭДС будет такой же, как и в каждом витке первичной обмотки. Поэтому отношение электродвижущих сил в первичной и вторичной обмотках равно отношению чисел витков:

$$\mathscr{E}_1/\mathscr{E}_2 = n_1/n_2. \qquad (15)$$

На выходе разомкнутой вторичной обмотки существует напряжение, равное индуцируемой в ней ЭДС:

$$U_2 = \mathscr{E}_2. \qquad (16)$$

Подставляя сюда $\mathscr{E}_2$ из (15) и учитывая (14), получаем

$$U_2 = \frac{n_2}{n_1}\mathscr{E}_1 = -\frac{n_2}{n_1}U_L. \qquad (17)$$

Режим холостого хода. Таким образом, значение напряжения на разомкнутой вторичной обмотке трансформатора пропорционально не подаваемому на первичную обмотку напряжению U_1, а лишь напряжению на индуктивном сопротивлении первичной обмотки U_L. Отсюда сразу становится ясна роль сердечника трансформатора. В самом деле, из формулы (13) следует, что напряжение на индуктивности U_L будет тем ближе к подаваемому на вход трансформатора напряжению U_1, чем больше будет индуктивное сопротивление первичной обмотки ωL по сравнению с ее активным сопротивлением R. Наличие сердечника из материала с высокой магнитной проницаемостью приводит к многократному увеличению индуктивности L. У такого трансформатора на холостом ходу $U_2 \approx -\frac{n_2}{n_1}U_1$. Знак минус означает, что эти напряжения находятся в противофазе. Благодаря большому индуктивному сопротивлению первичной обмотки ток в ней при разомкнутой вторичной цепи мал.

Трансформатор под нагрузкой. При замыкании вторичной цепи трансформатора на некоторую нагрузку во вторичной обмотке появляется ток. Создаваемый этим током магнитный поток направлен так, что, согласно закону Ленца, препятствует изменению магнитного потока, создаваемого током в первичной обмотке. Если бы при этом ток в первичной обмотке остался неизменным, то это привело бы к уменьшению магнитного потока. Значит, включение нагрузки во вторичную цепь эквивалентно уменьшению индуктивности первичной цепи.

Но уменьшение индуктивного сопротивления немедленно приводит к увеличению тока в первичной обмотке, к уменьшению сдвига по фазе между напряжением и током и, следовательно, к увеличению потребляемой от внешней цепи мощности. Таким образом, если на холостом ходу трансформатор представляет собой почти чисто индук-

тивное сопротивление, то по мере увеличения нагрузки трансформатора, т. е. тока во вторичной цепи, характер сопротивления первичной обмотки трансформатора становится ближе к активному.

Если потери энергии в самом трансформаторе малы, то на основании закона сохранения энергии потребляемая трансформатором мощность целиком передается нагрузке. Тогда с помощью (6) можно написать

$$\frac{1}{2}U_{01}I_{01}\cos\varphi_1 = \frac{1}{2}U_{02}I_{02}\cos\varphi_2, \qquad (18)$$

где φ_1 и φ_2 — сдвиги фаз между током и напряжением в первичной и вторичной цепях.

Приведенное выше рассмотрение работы трансформатора относится к идеализированному случаю трансформатора без потерь. В реальном трансформаторе всегда имеются потери, связанные с выделением джоулевой теплоты в обмотках, с токами Фуко, с необратимыми явлениями при перемагничивании сердечника и с рассеянием магнитного потока. Но в современных трансформаторах суммарные потери не превышают нескольких процентов от передаваемой мощности. Коэффициент полезного действия трансформаторов очень высок и лежит в пределах 95–99,5%.

Выпрямление переменного тока. Для многих практических применений необходимо преобразовать переменный синусоидальный ток в ток одного направления. Этой цели служат *выпрямители*, действие которых основано на односторонней проводимости ламповых и полупроводниковых диодов.

Понять действие выпрямителя можно, не вникая в физическую природу самого механизма односторонней проводимости.

Простейшая схема выпрямителя приведена на рис. 146*а*. Это однополупериодный выпрямитель, в котором ток через нагрузку R те-

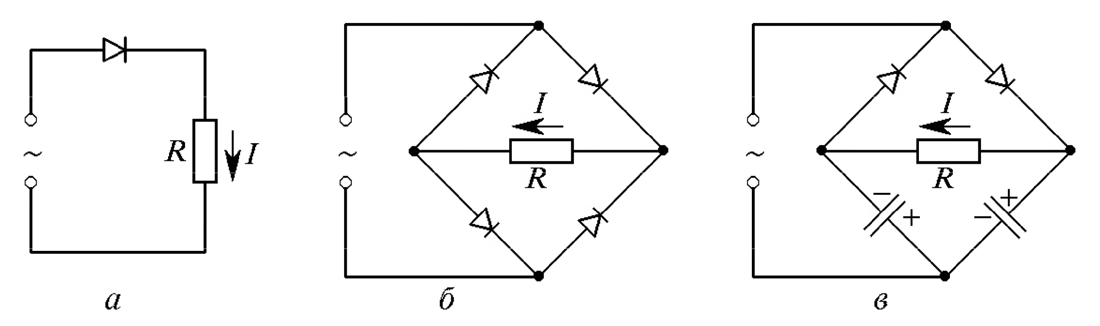


Рис. 146. Схемы выпрямителей: однополупериодного (*а*), двухполупериодного (*б*) и с удвоением напряжения (*в*)

чет только в течение одной половины каждого периода приложенного синусоидального напряжения.

В мостиковой схеме выпрямителя, показанной на рис. 146*б*, ток через нагрузку идет в одном и том же направлении в течение обеих половин каждого периода. Но в таком двухполупериодном выпрямителе ток все-таки тоже пульсирует. Для сглаживания этих пульса-

ций используют так называемые электрические фильтры, если требуется не только получить ток одного направления, но и постоянное напряжение.

В приведенных на рис. 146*а,б* схемах максимальное значение напряжения на нагрузке (при идеальных диодах) равно амплитудному значению приложенного синусоидального напряжения. В показанной на рис. 146*в* схеме выпрямителя напряжение на нагрузке практически вдвое больше амплитудного значения приложенного напряжения, если время разрядки конденсаторов через сопротивление нагрузки ($\tau \sim RC$) значительно превышает период T синусоидального напряжения. Это так называемая схема с удвоением напряжения.

Задачи

1. Активное сопротивление R первичной обмотки трансформатора составляет 10 % ее индуктивного сопротивления $L\omega$. Какое напряжение будет на разомкнутой вторичной обмотке, имеющей вдвое больше витков, если первичную обмотку включить в сеть напряжением 220 В?

Решение. Напряжение U_2 на разомкнутой вторичной обмотке связано с напряжением U_L на индуктивном сопротивлении первичной обмотки соотношением (17). Поэтому в рассматриваемом случае для действующих значений имеем $U_2 = 2U_L$. Напряжение на индуктивности и сопротивлении в первичной обмотке сдвинуты по фазе на $\pi/2$, а их действующие значения U_L и U_R связаны с действующим значением U_1 приложенного напряжения тем же соотношением (13), что и соответствующие амплитудные значения. Отношение U_R/U_L, в соответствии с условием задачи, равно 0,1. Поэтому

$$U_1 = \sqrt{U_R^2 + U_L^2} = U_L\sqrt{1 + (U_R/U_L)^2} = U_L\sqrt{1 + 0{,}01} \approx U_L \cdot 1{,}005.$$

На разомкнутой вторичной обмотке получаем

$$U_2 = 2U_L = \frac{2U_1}{1{,}005} \approx 2U_1\,(1 - 0{,}005) = 2U_1 \cdot 0{,}995 = 438 \text{ В}.$$

Выходное напряжение оказывается всего на 0,5% меньше значения 440 В, которое соответствовало бы идеализированному случаю чисто индуктивного сопротивления первичной обмотки.

2. Последовательно с электрокипятильником, включенным в осветительную сеть с частотой $f = 50$ Гц, подключили дроссель. При этом потребляемая кипятильником мощность упала в два раза. Найдите индуктивность L дросселя, если сопротивление кипятильника $R = 50$ Ом.

Решение. По условию задачи потребляемая кипятильником мощность после подключения дросселя уменьшилась вдвое. Значит, напряжение на нем уменьшилось в $\sqrt{2}$ раз. Если построить векторную диаграмму для последовательно соединенных активного сопротивления кипятильника и индуктивного сопротивления дросселя, то легко убедиться, что напряжения на кипятильнике и на дросселе одинаковы и в $\sqrt{2}$ раз меньше сетевого напряжения. Но это означает, что $R = \omega L$. Отсюда

$$L = \frac{R}{\omega} = \frac{R}{2\pi f} = 0{,}16 \text{ Гн}.$$

- При каких условиях выражение (2) можно использовать для расчета работы переменного тока? Ведь оно, строго говоря, было получено для постоянного тока.
- Нарисуйте примерный график зависимости от времени мгновенной мощности в цепи переменного тока для случаев $\varphi = 0$ (активная нагрузка), $\varphi = \pm\pi/2$ (реактивная нагрузка) и $\varphi = \pm\pi/4$.
- В каких случаях при расчете работы переменного тока можно пользоваться выражением (6) для средней мощности, а не выражением (5) для мгновенной мощности?
- Каким образом можно уменьшить тепловые потери в линиях электропередачи, изменяя характер сопротивления нагрузки? Почему в сетях переменного тока потребитель энергии должен обладать практически активным в целом сопротивлением?
- В чем преимущество использования линий высокого напряжения для передачи электроэнергии?
- Какую роль в трансформаторе играет сердечник из материала с высокой магнитной проницаемостью? Почему железный сердечник трансформатора собирают из отдельных изолированных пластин?
- Из формулы (17) следует, что коэффициент трансформации напряжения определяется отношением чисел витков n_2/n_1. Казалось бы, при отношении n_2/n_1 потери в трансформаторе будут тем меньше, чем меньше значения n_1 и n_2, так как с увеличением числа витков растет активное сопротивление. Почему же у трансформаторов обмотки обычно содержат большое число витков?
- Можно ли включать трансформатор в сеть постоянного тока?
- Нарисуйте графики зависимости силы тока от времени в нагрузке выпрямителей, схемы которых показаны на рис. 146*а*,*б*.
- Объясните, почему в схеме выпрямителя на рис. 146*в* происходит удвоение напряжения на нагрузке. Предложите схему выпрямителя, в котором на нагрузке происходило бы утроение напряжения.

§ 24. Трехфазный ток. Электрические машины переменного тока

Наряду с простым синусоидальным переменным током в технике широко используется трехфазный ток.

Представим себе прямоугольную проволочную рамку с несколькими витками, равномерно вращающуюся в однородном магнитном поле. Возникающая в этой рамке ЭДС индукции меняется по синусоидальному закону. Если же вокруг общей оси вращается не одна, а три одинаковые рамки, плоскости которых повернуты относительно друг друга на 120°, то возникающие в них синусоидальные ЭДС будут сдвинуты по фазе на 120° (рис. 147):

$$\mathscr{E}_1 = \mathscr{E}_0 \sin \omega t, \quad \mathscr{E}_2 = \mathscr{E}_0 \sin \left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right), \quad \mathscr{E}_3 = \mathscr{E}_0 \sin \left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right). \quad (1)$$

Обмотку каждой из этих рамок можно замкнуть на свое нагрузочное сопротивление (рис. 148) и получить три синусоидальных переменных тока, между которыми будет строго постоянная разность фаз. Такие три согласованных переменных тока называют трехфазным током.

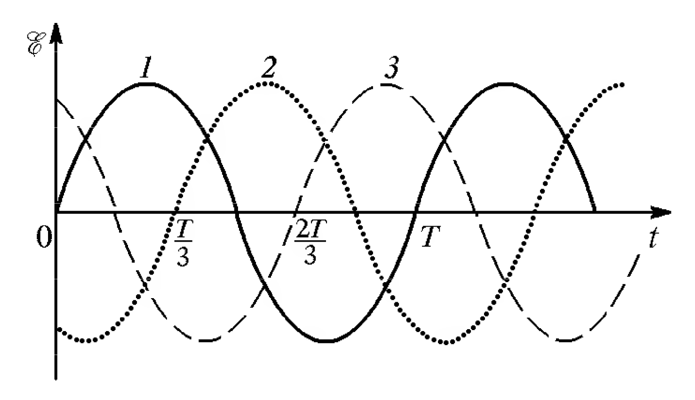


Рис. 147. Графики ЭДС, сдвинутых по фазе на 120°

Соединения звездой и треугольником. Так как для явлений в электрических цепях важны только разности потенциалов, то можно объединить в один провод по одному проводу из каждой цепи. В результате получается соединение генератора с потребителем с помощью четырех, а не шести проводов, называемое *соединением звездой* (рис. 149*а*). Если же объединять по

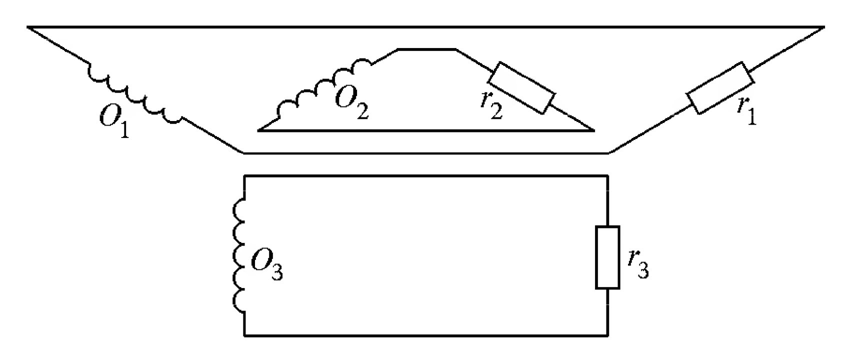


Рис. 148. Три независимые линии соединения генератора с потребителями

одному проводу из каждой цепи на рис. 148 попарно, то в результате получается схема соединения генератора с потребителем тремя проводами, называемая *соединением треугольником* (рис. 149*б*).

В цепях трехфазного тока напряжения между концами каждой обмотки генератора называются фазными напряжениями, а токи в

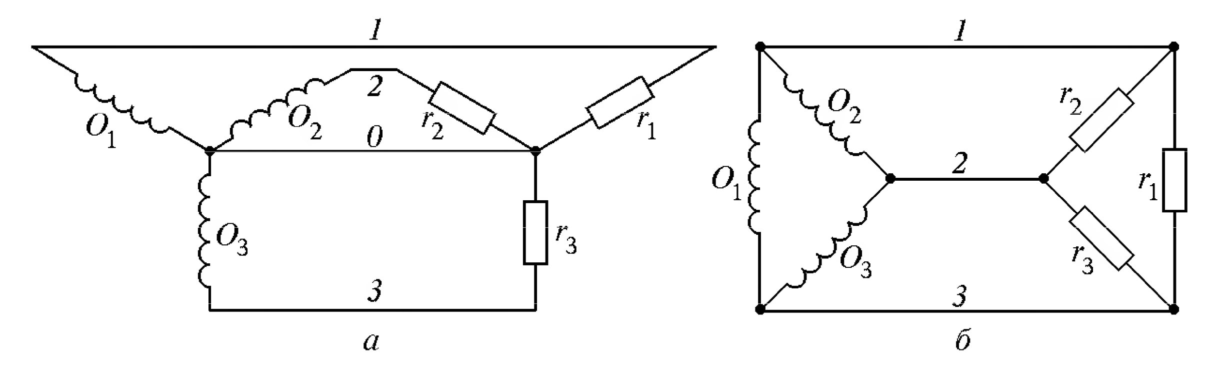


Рис. 149. Соединение генератора с потребителями звездой (*а*) и треугольником (*б*)

этих обмотках — фазными токами. Так же называют напряжения и токи в нагрузочных сопротивлениях. Напряжения между проводами *1*, *2*, *3* на рис. 149*а* и между любой парой проводов на рис. 149*б* на-

зываются линейными напряжениями, а токи в этих проводах — линейными токами. Легко видеть, что при соединении звездой фазные токи совпадают с линейными токами, а фазные и линейные напряжения различаются. При соединении треугольником, наоборот, совпадают фазные и линейные напряжения, а различаются фазные и линейные токи.

Векторные диаграммы. Рассмотрим подробнее соединение звездой. Построим векторные диаграммы токов и напряжений. Предположим, что генератор разомкнут. Тогда фазные напряжения совпадают с соответствующими ЭДС, и поскольку последние сдвинуты по фазе на 120° и 240°, то диаграмма фазных напряжений U_1, U_2 и U_3 имеет вид, показанный на рис. 150. Как видно из рис.149*а*, мгновенное значение линейного напряжения, например, между проводами *1* и *2* равно разности мгновенных значений соответствующих фазных напряжений. Поэтому вектор $\mathbf{U}_{12}$, изображающий это напряжение, равен разности векторов $\mathbf{U}_1$ и $\mathbf{U}_2$, изображающих фазные напряжения в первой и второй обмотках (рис. 150). Разумеется, вектор $\mathbf{U}_{12}$ можно перенести параллельно самому себе так, чтобы его начало совпало с общим центром вращения векторов. Из рисунка сразу видно, что амплитуда линейного напряжения при соединении звездой в $\sqrt{3}$ раз больше амплитуды фазного. То же

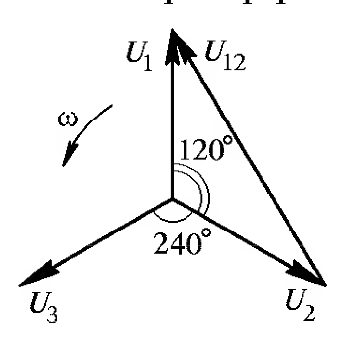


Рис. 150. Векторная диаграмма фазных напряжений при соединении звездой

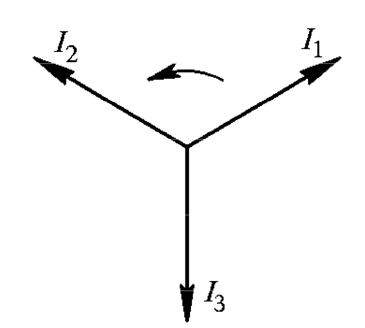


Рис. 151. Векторная диаграмма токов в соединении звездой при одинаковых нагрузках

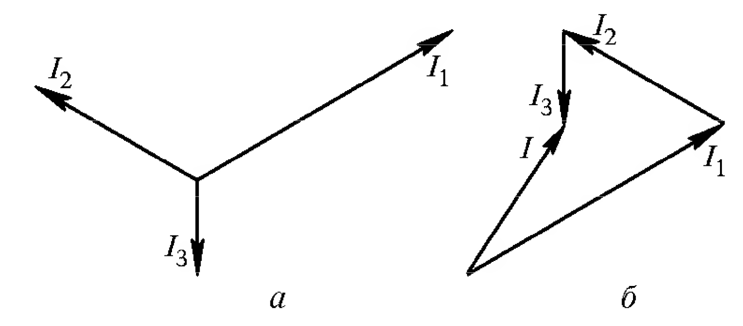


Рис. 152. Векторная диаграмма токов при несимметричной нагрузке (*а*) и нахождение вектора **I** для тока в нулевом проводе (*б*)

самое относится и к действующим значениям этих напряжений. Если, например, фазное напряжение в сети 220 В, то линейное напряжение в этой же сети 380 В.

Так же просто строится векторная диаграмма токов. При одинаковых нагрузках амплитуды токов в проводах *1*, *2*, *3* равны, а токи I_1, I_2, I_3 сдвинуты по фазе на 120° и 240° (рис. 151). В нулевом проводе в любой момент ток равен сумме токов I_1, I_2 и I_3 и при симметричной нагрузке, как видно из рис. 151, обращается в нуль. В

этом случае нулевой провод можно убрать, не изменяя токов в цепи. Если нагрузка несимметрична, то длины векторов, изображающих токи I_1, I_2 и I_3, будут неодинаковы. Теперь в нулевом проводе будет ток I, амплитуду и фазу которого легко найти с помощью векторной диаграммы, построение которой ясно из рис. 152.

Совершенно аналогично может быть построена векторная диаграмма фазных токов в соединении треугольником. При симметричной нагрузке с помощью векторной диаграммы можно убедиться, что амплитуды линейных токов будут в $\sqrt{3}$ раз больше, чем амплитуды фазных токов.

Все приведенные выше результаты можно получить и аналитически, не используя векторных диаграмм. Для этого нужно воспользоваться формулами (1) и соответствующими формулами для токов.

В рассмотренных схемах и обмотки генератора, и нагрузки соединены одинаково — либо звездой, либо треугольником. Разумеется, можно употреблять и комбинированные схемы, соединяя обмотки генератора звездой, а нагрузки — треугольником или наоборот. В технике используются различные типы соединений в цепях трехфазного тока, но во всех случаях предпочтительной является симметричная нагрузка фаз, при которой потери будут наименьшими.

Преимущество использования в технике трехфазного тока по сравнению с однофазным заключается в экономии числа проводов и идущего на их изготовление материала. Но самой замечательной особенностью трехфазного тока является то, что он позволяет очень просто создать вращающееся магнитное поле. А с помощью такого поля можно сделать простые по конструкции электродвигатели, принцип работы которых заключается в следующем.

Модель синхронного и асинхронного двигателей. Будем вращать подковообразный магнит так, как показано на рис. 153. Вместе с магнитом будет вращаться и создаваемое им магнитное поле. Если в такое поле поместить магнитную стрелку, то она, стремясь установиться вдоль линий индукции магнитного поля, придет во вращение в ту же сторону, в которую вращается поле.

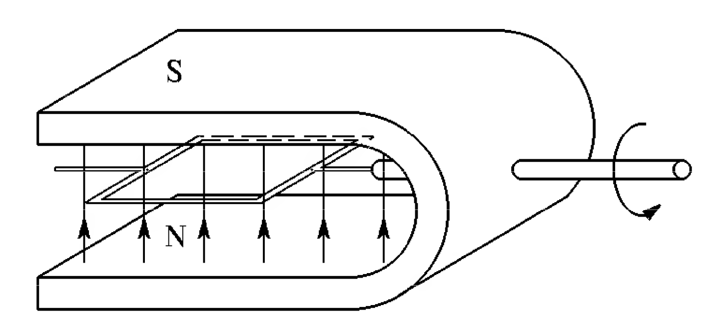


Рис. 153. Модель асинхронного двигателя

Так же будет вести себя и замкнутый виток провода (рис. 153). Вследствие изменения пронизывающего виток магнитного потока при вращении магнитного поля в витке возникает ЭДС индукции и индукционный ток. На этот ток со стороны магнитного поля будет действовать сила Ампера. По закону Ленца индукционный ток в витке направлен так, что взаимодействие этого тока с магнитным полем стремится уменьшить изменение магнитного потока вследствие вра-

щения магнитного поля. Поэтому рамка будет вращаться вслед за магнитным полем. В этом, разумеется, можно убедиться и иначе, если с помощью правила правой руки определить направление сил Ампера, действующих на отдельные стороны рамки.

Вместо рамки можно взять массивный металлический цилиндр или ротор в виде «беличьего колеса» (рис. 154), эквивалентного большому числу соединенных между собой проводящих рамок. При вращении магнитного поля в толще металла цилиндра также будут наводиться замкнутые индукционные токи (вихревые токи, или токи Фуко). Согласно закону Ленца взаимодействие этих токов с магнитным полем будет приводить к уменьшению относительной скорости вращения поля и цилиндра.

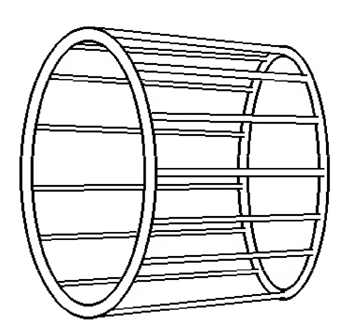


Рис. 154. Короткозамкнутый ротор асинхронного двигателя

Выясним, чем отличается поведение во вращающемся магнитном поле магнитной стрелки и короткозамкнутой металлической рамки. При равномерном вращении магнитной стрелки суммарный момент действующих на нее сил должен равняться нулю. Момент сил, действующих на стрелку со стороны магнитного поля, зависит от угла, образованного стрелкой с вектором индукции поля. Этот момент максимален, когда стрелка перпендикулярна полю, и обращается в нуль, когда стрелка направлена по полю.

Если на равномерно вращающуюся стрелку никакие другие моменты сил не действуют, то должен быть равен нулю и момент сил, действующих на нее со стороны вращающегося магнитного поля. Следовательно, в любой момент стрелка направлена вдоль поля и вращается синхронно с ним. Если же на стрелку действует тормозящий внешний момент, то стрелка, вращаясь синхронно с полем, будет несколько отставать от него по фазе, так чтобы тормозящий момент уравновешивался моментом сил со стороны магнитного поля.

Разумеется, вместо магнитной стрелки можно взять закрепленный на оси постоянный магнит или электромагнит, питаемый постоянным током. Они также будут вращаться синхронно с внешним вращающимся магнитным полем.

Несколько иначе обстоит дело в случае короткозамкнутой рамки или сплошного цилиндра. Индукционный ток зависит от относительной скорости вращения магнитного поля и ротора. При синхронном вращении индукционный ток отсутствует и, следовательно, равен нулю момент сил, действующих на ротор со стороны магнитного поля. Поэтому ротор может вращаться синхронно с полем только тогда, когда никакие тормозящие моменты на него не действуют. При наличии тормозящего момента при равномерном вращении он должен уравновешиваться моментом сил, действующих на индукционные токи в роторе со стороны магнитного поля.

Для возникновения этих индукционных токов ротор должен вращаться медленнее магнитного поля. Таким образом, угловая скорость ротора меньше угловой скорости вращения магнитного поля и зависит от тормозящего момента. Чем больше тормозящий момент, тем медленнее вращается ротор.

Магнитная стрелка или электромагнит постоянного тока во вращающемся магнитном поле — это модель *синхронного двигателя* переменного тока, который находит себе применение в тех случаях, когда необходимо иметь строго постоянное, не зависящее от нагрузки число оборотов. Короткозамкнутый ротор во вращающемся магнитном поле — это модель *асинхронного двигателя* переменного тока, угловая скорость вращения ротора которого зависит от механической нагрузки. В силу исключительной простоты конструкции и высокой надежности асинхронные двигатели получили широкое распространение в технике.

Вращающееся магнитное поле. Опишем теперь способ получения вращающегося магнитного поля в электродвигателях переменного тока.

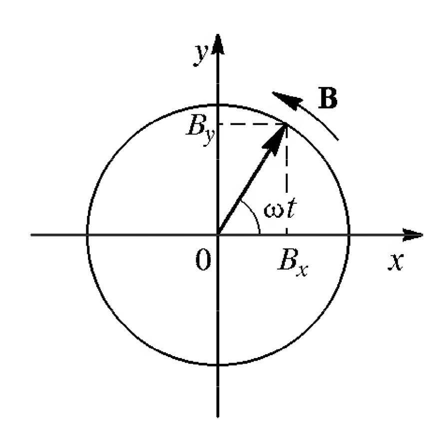


Рис. 155. Вращающееся магнитное поле

Предположим, что у нас есть равномерно вращающееся против часовой стрелки в плоскости xy магнитное поле, вектор индукции $\mathbf{B}$ которого не меняется по модулю (рис. 155). Из этого рисунка видно, что такое поле можно рассматривать как результат сложения двух магнитных полей, индукция одного из которых направлена вдоль оси x и меняется со временем по закону

$$B_x(t) = B\cos\omega t, \tag{2}$$

а индукция другого направлена по оси y и имеет вид

$$B_y(t) = B\sin\omega t = B\cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right), \tag{3}$$

т. е. отстает по фазе от B_x на $\pi/2$. Такие поля легко получить, располагая взаимно перпендикулярно две одинаковые катушки и пропуская по ним синусоидальные токи одинаковой амплитуды, но сдвинутые по фазе на $\pi/2$. Сумма этих полей и дает вращающееся магнитное поле.

Совершенно аналогично можно получить вращающееся магнитное поле с помощью трехфазного переменного тока. Для этого нужно три одинаковые катушки расположить так, чтобы их оси лежали под углом 120° друг к другу и пересекались в одной точке, и включить катушки в сеть трехфазного тока по схеме звезды или треугольника. Тогда магнитное поле, создаваемое каждой катушкой, будет направлено вдоль оси соответствующей катушки

и зависеть от времени в соответствии с формулами (1):

$$\mathbf{B}_1(t) = \mathbf{B}_{01} \sin \omega t,$$
$$\mathbf{B}_2(t) = \mathbf{B}_{02} \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right), \qquad (4)$$
$$\mathbf{B}_3(t) = \mathbf{B}_{03} \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right).$$

Амплитудные значения этих полей B_{01}, B_{02} и B_{03} равны между собой. Обозначим их через B_0. Результирующее поле

$$\mathbf{B}(t) = \mathbf{B}_1(t) + \mathbf{B}_2(t) + \mathbf{B}_3(t) \qquad (5)$$

имеет постоянный модуль, равный $(3/2)B_0$, и равномерно вращается в плоскости осей катушек с угловой скоростью ω. Чтобы убедиться в этом, спроецируем вектор индукции результирующего поля **B** на оси x и y (рис. 156):

$$B_x = B_2 \cos 30° - B_3 \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2} B_0 \left[\sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) - \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)\right].$$

Используя формулу разности синусов двух углов, получаем

$$B_x = \frac{3}{2} B_0 \cos \omega t. \qquad (6)$$

Аналогично,

$$B_y = B_1 - B_2 \cos 30° - B_3 \cos 30° =$$
$$= B_0\left[\sin \omega t - \frac{1}{2} \sin\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right) - \frac{1}{2} \sin\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)\right].$$

Преобразуя второе и третье слагаемые в квадратных скобках с помощью формулы суммы синусов, найдем

$$B_y = \frac{3}{2} B_0 \sin \omega t. \qquad (7)$$

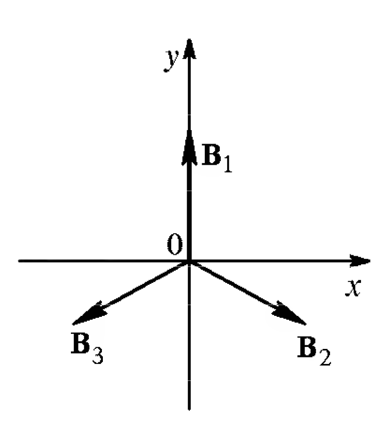


Рис. 156. Получение вращающегося магнитного поля при использовании трехфазного тока

Сравнивая (6) и (7) с формулами (2) и (3), убеждаемся, что поле **B** действительно равномерно вращается с угловой скоростью ω. Направление вращения магнитного поля, а следовательно, и ротора электродвигателя, можно изменить на противоположное, если поменять местами концы любой пары проводов, присоединенных к катушкам статора, создающим магнитное поле.

Отметим, что синхронные электродвигатели переменного тока являются обратимыми, т. е. могут быть использованы и как генераторы. Если не подавать напряжение на обмотки статора, а ротор (электромагнит) привести во вращение, то в обмотках статора будет индуцироваться переменное трехфазное напряже-

ние. А асинхронный двигатель подобен трансформатору, у которого вторичная обмотка выполнена подвижной. Что же касается физической сущности явлений, то в обоих случаях она одинакова, поскольку токи и во вторичной обмотке трансформатора, и в роторе асинхронного двигателя имеют чисто индукционное происхождение.

- Что такое трехфазный переменный ток?
- Постройте векторные диаграммы при соединении треугольником. Покажите, что при симметричной нагрузке амплитуды линейных токов будут в $\sqrt{3}$ раз больше, чем амплитуды фазных токов.
- Почему в сетях трехфазного тока всегда стремятся нагрузить все три фазы по возможности одинаково?
- Какими преимуществами обладает трехфазный ток перед однофазным?
- Объясните принцип действия синхронного и асинхронного электродвигателей. Почему угловая скорость вращения ротора асинхронного двигателя уменьшается с увеличением механической нагрузки?
- Почему синхронные двигатели переменного тока обратимы, а асинхронные — нет?
- Какими способами можно создать вращающееся магнитное поле?

V. ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫЕ КОЛЕБАНИЯ И ВОЛНЫ

Электромагнитное поле может существовать и в отсутствие электрических зарядов или токов: именно такие «самоподдерживающиеся» электрическое и магнитное поля представляют собой *электромагнитные волны*, к которым относятся видимый свет, инфракрасное, ультрафиолетовое и рентгеновское излучения, радиоволны и т. д.

§ 25. Колебательный контур

Простейшая система, в которой возможны собственные электромагнитные колебания, — это так называемый *колебательный контур*, состоящий из соединенных между собой конденсатора и катушки индуктивности (рис. 157). Как и у механического осциллятора, например массивного тела на упругой пружине, собственные колебания в контуре сопровождаются энергетическими превращениями.

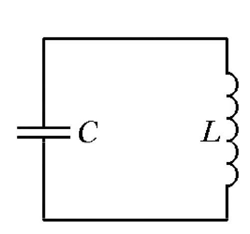


Рис. 157. Колебательный контур

Аналогия между механическими и электромагнитными колебаниями. Для колебательного контура аналог потенциальной энергии механического осциллятора (например, упругой энергии деформированной пружины) — это энергия электрического поля в конденсаторе. Аналог кинетической энергии движущегося тела — энергия магнитного поля в катушке индуктивности. В самом деле, энергия пружины $E_п$ пропорциональна квадрату смещения из положения равновесия $(E_п = \frac{1}{2} kx^2)$, а энергия конденсатора $W_э$ пропорциональна квадрату заряда $(W_э = \frac{1}{2C} q^2)$. Кинетическая энергия тела пропорциональна квадрату его скорости $v = \dot{x}$ $(E_к = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m\dot{x}^2)$, а энергия магнитного поля в катушке пропорциональна квадрату силы тока $I = \dot{q}$ $(W_м = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} L\dot{q}^2)$. Полная механическая энергия пружинного осциллятора E равна сумме потенциальной и кинетической энергий:

$$E = \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} mv^2. \qquad (1)$$

Энергия колебаний. Аналогично, полная электромагнитная энергия колебательного контура W равна сумме энергий электрического поля в конденсаторе и магнитного поля в катушке:

$$W = \frac{1}{2C} q^2 + \frac{1}{2} LI^2. \qquad (2)$$

Из сопоставления формул (1) и (2) следует, что аналогом жесткости k пружинного осциллятора в колебательном контуре служит величина $1/C$, обратная емкости конденсатора C, а аналогом массы m — индуктивность катушки L.

Напомним, что в механической системе, энергия которой дается выражением (1), могут происходить собственные незатухающие гармонические колебания. Квадрат частоты ω_0^2 таких колебаний равен отношению коэффициентов при квадратах смещения и скорости в выражении для энергии:

$$\omega_0^2 = k/m. \qquad (3)$$

Собственная частота. В колебательном контуре, электромагнитная энергия которого дается выражением (2), могут происходить собственные незатухающие гармонические колебания, квадрат частоты ω_0^2 которых тоже, очевидно, равен отношению соответствующих коэффициентов (т. е. коэффициентов при квадратах заряда и силы тока):

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC}. \qquad (4)$$

Из (4) следует выражение для периода колебаний, называемое *формулой Томсона*:

$$T = 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{LC}.$$

При механических колебаниях зависимость смещения x от времени определяется косинусоидальной функцией, аргумент которой называется фазой колебаний:

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \alpha). \qquad (5)$$

Амплитуда и начальная фаза. Амплитуда A и начальная фаза α определяются начальными условиями, т. е. значениями смещения $x(0)$ и скорости $v(0) = \dot{x}(0)$ при $t = 0$.

Аналогично, при электромагнитных собственных колебаниях в контуре заряд конденсатора q зависит от времени по закону

$$q(t) = Q \cos(\omega_0 t + \alpha), \qquad (6)$$

где частота ω_0 определяется, в соответствии с (4), только свойствами самого контура, а амплитуда Q колебаний заряда и начальная фаза α, как и у механического осциллятора, определяется началь-

ными условиями, т. е. значениями заряда конденсатора $q(0)$ и силы тока $I(0) = \dot{q}(0)$ при $t = 0$. Таким образом, собственная частота ω_0 не зависит от способа возбуждения колебаний, в то время как амплитуда и начальная фаза определяются именно условиями возбуждения.

Энергетические превращения. Рассмотрим подробнее энергетические превращения при механических и электромагнитных колебаниях. На рис. 158 схематически изображены состояния механического и электромагнитного осцилляторов через промежутки

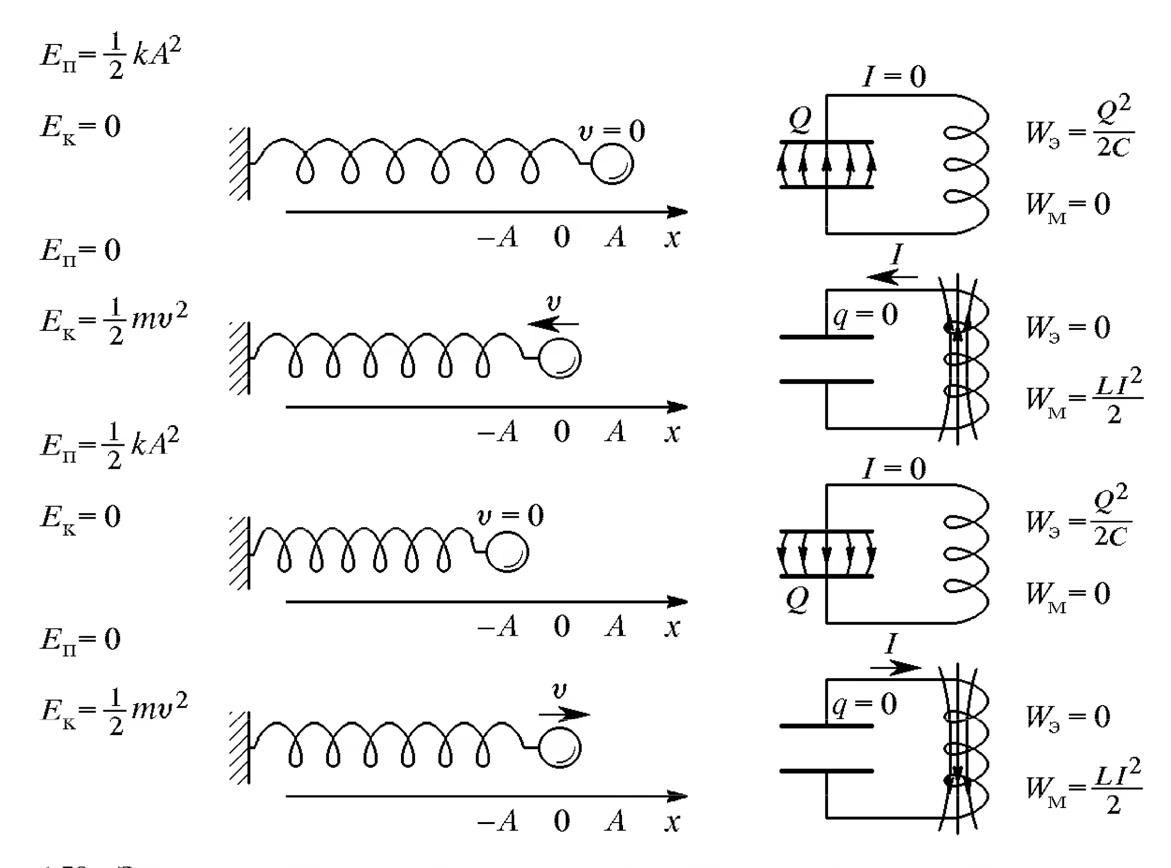


Рис. 158. Энергетические превращения при механических и электромагнитных колебаниях

времени в четверть периода $T = 2\pi/\omega_0$. Дважды за период колебаний энергия превращается из одного вида в другой и обратно. Полная энергия колебательного контура как и полная энергия механического осциллятора, в отсутствие диссипации остается неизменной. Чтобы убедиться в этом, нужно в формулу (2) подставить выражение (6) для $q(t)$ и выражение для силы тока $I = \dot{q}(t)$:

$$I = \dot{q}(t) = -\omega_0 Q \sin(\omega_0 t + \alpha). \tag{7}$$

Используя формулу (4) для ω_0^2, получаем

$$W = \frac{1}{2C} q^2 + \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \cos^2(\omega_0 t + \alpha) + \\ + \frac{1}{2} L\omega_0^2 Q^2 \sin^2(\omega_0 t + \alpha) = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} L\omega_0^2 Q^2. \tag{8}$$

Неизменная полная энергия W совпадает с потенциальной энергией $W_э$ в моменты, когда заряд конденсатора максимален, и совпадает с энергией магнитного поля катушки — «кинетической» энергией — в моменты, когда заряд конденсатора обращается в нуль, а ток максимален. При взаимных превращениях два вида энергии совершают гармонические колебания с одинаковой амплитудой $W/2$ в противофазе друг с другом и с частотой $2\omega_0$ относительно своего среднего значения $W/2$. В этом легко убедиться как из рис. 158, так и с помощью формул тригонометрических функций половинного аргумента:

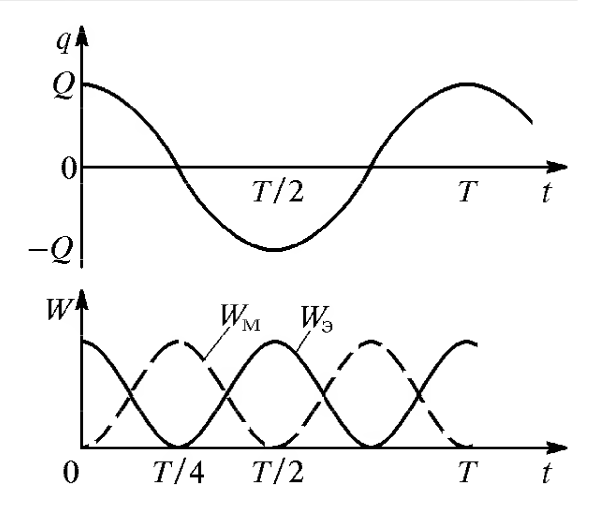


Рис. 159. Графики зависимости от времени заряда конденсатора q, энергии $W_э$ электрического поля конденсатора и энергии $W_м$ магнитного поля в катушке

$$\begin{aligned} W_э(t) &= \frac{1}{2C} Q^2 \cos^2(\omega_0 t + \alpha) = \frac{1}{2} W\,[1 + \cos 2(\omega_0 t + \alpha)], \\ W_м(t) &= \frac{1}{2} L\omega_0^2 Q^2 \sin^2(\omega_0 t + \alpha) = \frac{1}{2} W\,[1 - \cos 2(\omega_0 t + \alpha)]. \end{aligned} \qquad (9)$$

Графики зависимости от времени заряда конденсатора $q(t)$, энергии электрического поля $W_э(t)$ и энергии магнитного поля $W_м(t)$ показаны на рис. 159 для начальной фазы $\alpha = 0$.

Количественные закономерности собственных электромагнитных колебаний можно установить непосредственно на основе законов для квазистационарных токов, не обращаясь к аналогии с механическими колебаниями.

Уравнение для колебаний в контуре. Рассмотрим простейший колебательный контур, показанный на рис. 157. При обходе контура, например, против часовой стрелки, сумма напряжений на катушке индуктивности U_L и конденсаторе U_C в такой замкнутой последовательной цепи равна нулю:

$$U_L + U_C = 0. \qquad (10)$$

Напряжение на конденсаторе U_C связано с зарядом пластины q и с емкостью C соотношением $U_C = q/C$. Напряжение на индуктивности U_L в любой момент времени равно по модулю и противоположно по знаку ЭДС самоиндукции, поэтому $U_L = dI/dt$. Ток в цепи равен скорости изменения заряда конденсатора: $I = dq/dt$. Подставляя силу тока в выражение для напряжения на катушке индуктивности и обозначая вторую производную заряда конденсатора q по времени через

$\ddot{q}$, получим $U_L = L\ddot{q}$. Теперь выражение (10) принимает вид

$$L\ddot{q} + \frac{q}{C} = 0. \tag{11}$$

Перепишем это уравнение иначе, вводя по определению $\omega_0^2 = 1/LC$:

$$\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0. \tag{12}$$

Уравнение (12) совпадает с уравнением гармонических колебаний механического осциллятора с собственной частотой ω_0. Решение такого уравнения дается гармонической (синусоидальной) функцией времени (6) с произвольными значениями амплитуды Q и начальной фазы α. Отсюда следуют все приведенные выше результаты, касающиеся электромагнитных колебаний в контуре.

Затухание электромагнитных колебаний. До сих пор обсуждались собственные колебания в идеализированной механической системе и идеализированном LC-контуре. Идеализация заключалась в пренебрежении трением в осцилляторе и электрическим сопротивлением в контуре. Только в этом случае система будет консервативной и энергия колебаний будет сохраняться.

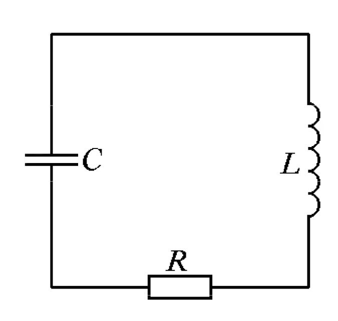


Рис. 160. Колебательный контур с сопротивлением

Учет диссипации энергии колебаний в контуре можно провести аналогично тому, как это было сделано в случае механического осциллятора с трением. Наличие электрического сопротивления катушки и соединительных проводов неизбежно связано с выделением джоулевой теплоты. Как и раньше, это сопротивление можно рассматривать как самостоятельный элемент R в электрической схеме колебательного контура, считая катушку и провода идеальными (рис. 160). При рассмотрении квазистационарного тока в таком контуре в уравнение (10) нужно добавить напряжение U_R на сопротивлении R:

$$U_L + U_R + U_C = 0. \tag{13}$$

Подставляя в (13) $U_C = q/C$, $U_R = RI = R\dot{q}$ и $U_L = dI/dt = L\ddot{q}$, получаем

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + q/C = 0. \tag{14}$$

Вводя обозначения

$$\omega_0^2 = 1/LC, \quad 2\gamma = R/L, \tag{15}$$

перепишем уравнение (14) в виде

$$\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + \omega_0^2 q = 0. \tag{16}$$

Уравнение (16) для $q(t)$ имеет точно такой же вид, как и уравнение для $x(t)$ при колебаниях механического осциллятора с трени-

ем, пропорциональным скорости (вязким трением). Поэтому при наличии электрического сопротивления в контуре электромагнитные колебания происходят по такому же закону, как и механические колебания осциллятора с вязким трением.

Диссипация энергии колебаний. Как и при механических колебаниях, можно установить закон убывания со временем энергии собственных колебаний, применяя закон Джоуля—Ленца для подсчета выделяющейся теплоты:

$$\frac{dW}{dt} = -I^2R. \tag{17}$$

В результате в случае малого затухания для промежутков времени, много больших периода колебаний, скорость убывания энергии колебаний оказывается пропорциональной самой энергии:

$$\frac{dW}{dt} = -2\gamma W. \tag{18}$$

Решение уравнения (18) имеет вид

$$W(t) = W_0 \exp(-2\gamma t) = W_0 \exp\left(-\frac{R}{L}\,t\right). \tag{19}$$

Энергия собственных электромагнитных колебаний в контуре с сопротивлением убывает по экспоненциальному закону.

Энергия колебаний пропорциональна квадрату их амплитуды. Для электромагнитных колебаний это следует, например, из (8). Поэтому амплитуда затухающих колебаний, в соответствии с (19), убывает по закону

$$Q = Q_0 \exp(-\gamma t) = Q_0 \exp\left(-\frac{R}{2L}\,t\right). \tag{20}$$

Время жизни колебаний. Как видно из (20), амплитуда колебаний убывает в e раз за время τ, равное $1/\gamma = 2L/R$, независимо от начального значения амплитуды Q_0. Это время τ носит название *времени жизни колебаний*, хотя, как видно из (20), колебания формально продолжаются бесконечно долго. В действительности, конечно, о колебаниях имеет смысл говорить лишь до тех пор, пока их амплитуда превышает характерное значение уровня тепловых шумов в данной цепи. Поэтому фактически колебания в контуре «живут» конечное время, которое, однако, может в несколько раз превосходить введенное выше время жизни τ.

Часто бывает важно знать не само по себе время жизни колебаний τ, а число N полных колебаний, которое произойдет в контуре за это время τ. Это число $N = \tau/T$, умноженное на π, называют *добротностью контура*.

Строго говоря, затухающие колебания не являются периодическими. При малом затухании можно условно говорить о периоде, под которым понимают промежуток времени между двумя последо-

вательными максимальными значениями заряда конденсатора (одинаковой полярности), либо максимальными значениями тока (одного направления).

Затухание колебаний влияет на период, приводя к его возрастанию по сравнению с идеализированным случаем отсутствия затухания. При малом затухании увеличение периода колебаний очень незначительно. Однако при сильном затухании колебаний вообще может не быть: заряженный конденсатор будет разряжаться апериодически, т. е. без изменения направления тока в контуре. Так будет при $\gamma \geqslant \omega_0$, т. е. при $R \geqslant 2\sqrt{L/C}$.

Точное решение. Сформулированные выше закономерности затухающих колебаний следуют из точного решения дифференциального уравнения (16). Непосредственной подстановкой можно убедиться, что оно имеет вид

$$q(t) = Q_0 \exp(-\gamma t) \cos(\omega_1 t + \alpha), \quad \omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}, \qquad (21)$$

где Q_0 и α — произвольные постоянные, значения которых определяются из начальных условий. При малом затухании множитель при косинусе можно рассматривать как медленно меняющуюся амплитуду колебаний.

Задача

Перезарядка конденсаторов через катушку индуктивности. В цепи, схема которой показана на рис. 161, заряд верхнего конденсатора равен q, а нижний не заряжен. В момент $t = 0$ ключ замыкают. Найти зависимость от времени заряда $q_1(t)$ верхнего конденсатора и тока $I(t)$ в катушке.

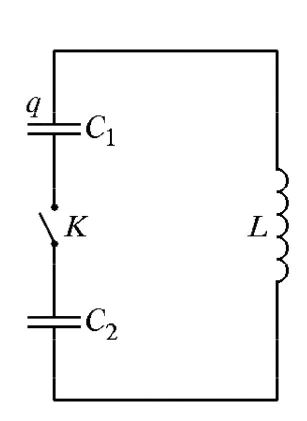


Рис. 161. В начальный момент времени заряжен только один конденсатор

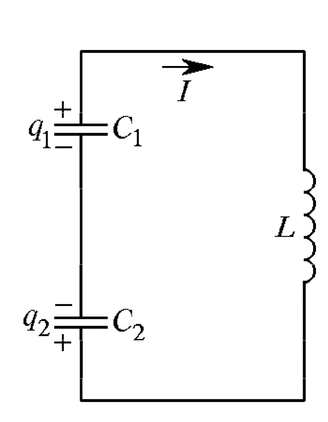


Рис. 162. Заряды конденсаторов и ток в контуре после замыкания ключа

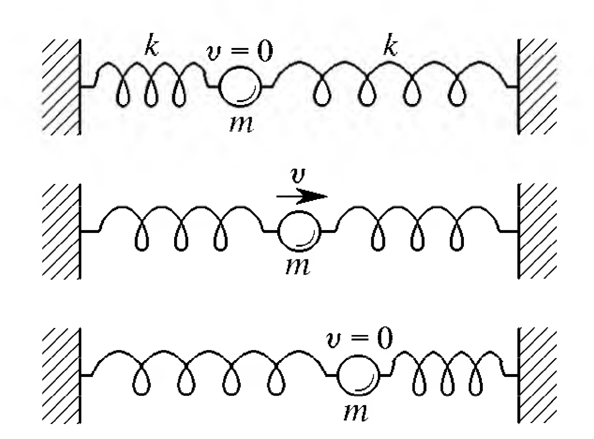


Рис. 163. Механическая аналогия для электрической цепи, показанной на рис. 162

Решение. После замыкания ключа в цепи возникают колебания: верхний конденсатор начинает разряжаться через катушку, заряжая при этом нижний; затем все происходит в обратном направлении. Пусть, например, при $t = 0$ положительно заряжена верхняя обкладка конденсатора. Тогда спу-

стя малый промежуток времени Δt знаки зарядов обкладок конденсаторов и направление тока будут такими, как показано на рис. 162. Обозначим через q_1 и q_2 заряды тех обкладок верхнего и нижнего конденсаторов, которые соединены между собой через катушку индуктивности. На основании закона сохранения электрического заряда

$$q_1 + q_2 = q. \tag{22}$$

Сумма напряжений на всех элементах замкнутого контура в каждый момент времени равна нулю:

$$-\frac{q_1}{C_1} + L\frac{dI}{dt} + \frac{q_2}{C_2} = 0. \tag{23}$$

Знак напряжения на конденсаторе соответствует распределению зарядов на рис. 162. и указанному направлению тока. Выражение для тока I через катушку можно записать в любом из двух видов:

$$I = \frac{dq_2}{dt} = -\frac{dq_1}{dt}. \tag{24}$$

Исключим из уравнения (23) dI/dt и q_2 с помощью соотношений (22) и (24):

$$q_1\left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) + L\ddot{q}_1 - \frac{q}{C_2} = 0. \tag{25}$$

Вводя обозначения

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC_0}, \quad C_0 = \frac{C_1C_2}{C_1 + C_2}, \tag{26}$$

перепишем (25) в следующем виде:

$$\ddot{q}_1 + \omega_0^2 q_1 - \frac{q}{LC_2} = 0. \tag{27}$$

Если вместо $q_1(t)$ ввести функцию

$$Q = q_1 - \frac{q}{LC_2\omega_0^2} = q_1 - q\frac{C_1}{C_1 + C_2} \tag{28}$$

и учесть, что $\ddot{q}_1 = \ddot{Q}$, то (27) принимает вид

$$\ddot{Q} + \omega_0^2 Q = 0. \tag{29}$$

Это обычное уравнение незатухающих гармонических колебаний, которое имеет решение

$$Q(t) = Q_0 \cos(\omega_0 t + \alpha), \tag{30}$$

где Q_0 и α — произвольные постоянные.

Возвращаясь от функции $Q(t)$ к $q_1(t)$, получим для зависимости от времени заряда верхнего конденсатора следующее выражение:

$$q_1(t) = q\frac{C_1}{C_1 + C_2} + Q_0 \cos(\omega_0 t + \alpha). \tag{31}$$

Для определения постоянных Q_0 и α учтем, что в начальный момент $t = 0$ заряд $q_1(0) = q$, а ток $I(0) = 0$. Для силы тока $I(t)$ из (24) и (31) имеем

$$I(t) = \omega_0 Q_0 \sin(\omega_0 t + \alpha). \tag{32}$$

Поскольку $I(0) = 0$, отсюда следует, что $\alpha = 0$. Подставляя теперь в (31) $q_1(0) = 0$ и учитывая, что $\alpha = 0$, получаем

$$Q_0 = q \frac{C_1}{C_1 + C_2}. \tag{33}$$

Итак, выражения для заряда $q_1(t)$ и силы тока $I(t)$ имеют вид

$$q_1(t) = q \frac{C_1}{C_1 + C_2} \left(1 + \frac{C_2}{C_1} \cos \omega_0 t\right), \tag{34}$$

$$I(t) = q\sqrt{\frac{C_2}{L(C_1 + C_2)C_1}} \sin \omega_0 t.$$

Характер осцилляций заряда и тока особенно нагляден при одинаковых значениях емкостей конденсаторов $C_1 = C_2 = C$. В этом случае

$$q_1(t) = \frac{q}{2} (1 + \cos \omega_0 t), \quad q_2(t) = \frac{q}{2} (1 - \cos \omega_0 t), \tag{35}$$

$$I(t) = \omega_0 \frac{q}{2} \sin \omega_0 t.$$

Заряд верхнего конденсатора осциллирует с амплитудой $q/2$ около среднего значения, равного $q/2$. За половину периода колебаний он уменьшается от максимального значения q в начальный момент до нуля, когда весь заряд оказывается на нижнем конденсаторе.

Выражение (26) для частоты колебаний ω_0, разумеется, можно было написать сразу, поскольку в рассматриваемом контуре конденсаторы соединены последовательно. Однако написать выражения (34) непосредственно затруднительно, так как при таких начальных условиях нельзя входящие в контур конденсаторы заменить одним эквивалентным.

Наглядное представление о происходящих здесь процессах дает механический аналог данной электрической цепи, показанный на рис. 163. Одинаковые пружины соответствуют случаю конденсаторов одинаковой емкости. В начальный момент левая пружина сжата, что соответствует заряженному конденсатору, а правая находится в недеформированном состоянии, так как аналогом заряда конденсатора здесь служит степень деформации пружины. При прохождении через среднее положение обе пружины частично сжаты, а в крайнем правом положении левая пружина недеформирована, а правая сжата так же, как левая в начальный момент, что соответствует полному перетеканию заряда с одного конденсатора на другой. Хотя шар совершает обычные гармонические колебания около положения равновесия, деформация каждой из пружин описывается функцией, среднее значение которой отлично от нуля.

В отличие от колебательного контура с одним конденсатором, где при колебаниях происходит повторяющаяся его полная перезарядка, в рассмотренной системе первоначально заряженный конденсатор полностью не перезаряжается. Например, при $C_1 = C_2$ его заряд уменьшается до нуля, а затем снова восстанавливается в той же полярности. В остальном эти колебания не отличаются от гармонических колебаний в обычном контуре. Энергия этих колебаний сохраняется, если, разумеется, можно пренебречь сопротивлением катушки и соединительных проводов.

- Поясните, почему из сопоставления формул (1) и (2) для механической и электромагнитной энергий сделан вывод о том, что аналогом жесткости k является $1/C$, а аналогом массы m — индуктивность L, а не наоборот.
- Приведите обоснование вывода выражения (4) для собственной частоты электромагнитных колебаний в контуре из аналогии с механическим пружинным осциллятором.
- Гармонические колебания в LC-контуре характеризуются амплитудой, частотой, периодом, фазой колебаний, начальной фазой. Какие из этих величин определяются свойствами самого колебательного контура, а какие зависят от способа возбуждения колебаний?
- Докажите, что средние значения электрической и магнитной энергий при собственных колебаниях в контуре равны между собой и составляют половину полной электромагнитной энергии колебаний.
- Как применить законы квазистационарных явлений в электрической цепи для вывода дифференциального уравнения (12) гармонических колебаний в LC-контуре?
- Какому дифференциальному уравнению удовлетворяет сила тока $I(t)$ в LC-контуре?
- Проведите вывод уравнения для скорости убывания энергии колебаний при малом затухании аналогично тому, как это было сделано для механического осциллятора с трением, пропорциональным скорости, и покажите, что для промежутков времени, значительно превосходящих период колебаний, это убывание происходит по экспоненциальному закону. Какой смысл имеет использованный здесь термин «малое затухание»?
- Покажите, что функция $q(t)$, даваемая формулой (21), удовлетворяет уравнению (16) при любых значениях Q_0 и α.
- Рассмотрите механическую систему, показанную на рис. 163, и найдите зависимость от времени деформации левой пружины и скорости массивного тела.

△ **Контур без сопротивления с неизбежными потерями.** В рассмотренной выше задаче, несмотря на не совсем обычные начальные условия для зарядов на конденсаторах, можно было применить обычные уравнения для электрических цепей, поскольку там были выполнены условия квазистационарности протекающих процессов. А вот в цепи, схема которой показана на рис. 164, при формальном внешнем сходстве со схемой на рис. 162, условия квазистационарности не выполняются, если в начальный момент один конденсатор заряжен, а второй — нет.

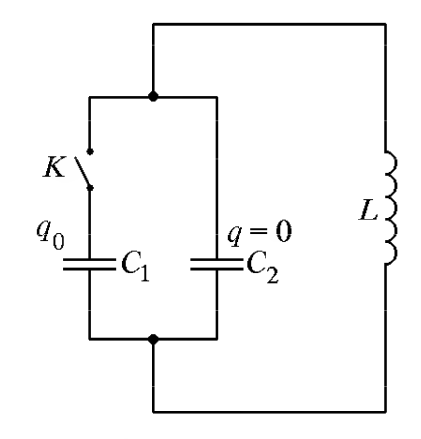


Рис. 164. Электрическая цепь, для которой не выполняются условия квазистационарности

Обсудим подробнее причины, по которым здесь нарушаются условия квазистационарности. Сразу после замыкания

ключа все процессы разыгрываются только в соединенных между собой конденсаторах, так как нарастание тока через катушку индуктивности происходит сравнительно медленно и поначалу ответвлением тока в катушку можно пренебречь.

При замыкании ключа возникают быстрые затухающие колебания в контуре, состоящем из конденсаторов и соединяющих их проводов. Период таких колебаний очень мал, так как мала индуктивность соединительных проводов. В результате этих колебаний заряд на пластинах конденсаторов перераспределяется, после чего два конденсатора можно рассматривать как один. Но в первый момент этого делать нельзя, ибо вместе с перераспределением зарядов происходит и перераспределение энергии, часть которой переходит в теплоту.

После затухания быстрых колебаний в системе происходят колебания, как в контуре с одним конденсатором емкости $C_1 + C_2$, заряд которого в начальный момент равен первоначальному заряду q_0 конденсатора C_1. Условием справедливости приведенного рассуждения является малость индуктивности соединительных проводов по сравнению с индуктивностью L катушки.

Как и в рассмотренной задаче, полезно и здесь найти механическую аналогию. Если там две пружины, соответствующие конденсаторам, были расположены по обе стороны массивного тела, то здесь они должны быть расположены по одну сторону от него, так чтобы колебания одной из них могли передаваться другой при неподвижном теле. Вместо двух пружин можно взять одну, но только в начальный момент она должна быть деформирована неоднородно.

Захватим пружину за середину и растянем ее левую половину на некоторое расстояние x_1. Вторая половина пружины останется в недеформированном состоянии, так что груз в начальный момент смещен из положения равновесия вправо на расстояние x_1 и покоится. Затем отпустим пружину. К каким особенностям приведет то обстоятельство, что в начальный момент пружина деформирована неоднородно?

Если бы при смещении груза на x_1 пружина была деформирована однородно, то движение груза в отсутствие трения представляло бы собой гармоническое колебание около положения равновесия с частотой $\omega = \sqrt{k/m}$ и амплитудой x_1:

$$x(t) = x_1 \cos \omega t. \qquad (36)$$

Начальная фаза колебаний в формуле (36) равна нулю, поскольку при $t = 0$ груз смещен из положения равновесия на расстояние x_1, равное амплитуде колебаний. Однако в нашем случае пружина в начальный момент деформирована неоднородно — разные части пружины деформированы по-разному.

При однородной начальной деформации пружины запас механической энергии системы равен $kx_1^2/2$. При начальных условиях нашей задачи, когда на расстояние x_1 растянута половина пружины, запас энергии равен $2kx_1^2/2$, ибо, как нетрудно сообразить, жесткость «половины» пружины равна $2k$. Если масса пружины мала по сравнению с массой шара, частота собственных колебаний пружины как протяженной системы много больше частоты колебаний шара на пружине. Эти «быстрые» колебания затухнут за время, составляющее малую долю периода колебаний шара. После затухания быстрых колебаний натяжение в пружине перераспределяется, а смещение груза практически остается равным x_1, так как груз за это время не успевает заметно сдвинуться. Деформация пружины становится однородной, а энергия системы равной $kx_1^2/2$.

Таким образом, роль быстрых колебаний пружины свелась к тому, что запас энергии системы уменьшился до того значения, которое соответствует однородной начальной деформации пружины. Ясно, что дальнейшие процессы в системе не отличаются от случая однородной начальной деформации. Зависимость смещения груза от времени $x(t)$ выражается той же самой формулой (36).

В рассмотренном примере в результате быстрых колебаний превратилась во внутреннюю энергию (в теплоту) половина первоначального запаса механической энергии. Ясно, что, подвергая начальной деформации не половину, а произвольную часть пружины, можно превратить во внутреннюю энергию любую долю первоначального запаса механической энергии. Но во всех случаях энергия колебаний груза на пружине соответствует запасу энергии при той же однородной начальной деформации пружины.

В электрической цепи в результате затухающих быстрых колебаний энергия заряженного конденсатора частично выделяется в виде джоулевой теплоты в соединительных проводах. При равных емкостях C_1 и C_2 это будет половина первоначального запаса энергии. Вторая половина остается в форме энергии сравнительно медленных электромагнитных колебаний в контуре, состоящем из катушки и двух соединенных параллельно конденсаторов C_1 и C_2.

Таким образом, в этой системе принципиально недопустима идеализация, при которой пренебрегается диссипацией энергии колебаний. Причина этого в том, что здесь возможны быстрые колебания, не затрагивающие катушки индуктивности или массивного тела в аналогичной механической системе.

Колебательный контур с нелинейными элементами. При изучении механических колебаний мы видели, что колебания далеко не всегда бывают гармоническими. Гармонические колебания — это характерное свойство линейных систем, в которых возвраща-

ющая сила пропорциональна отклонению от положения равновесия, а потенциальная энергия — квадрату отклонения. Реальные механические системы этими свойствами, как правило, не обладают, и колебания в них можно считать гармоническими лишь при малых отклонениях от положения равновесия.

В случае электромагнитных колебаний в контуре может сложиться впечатление, что мы имеем дело с идеальными системами, в которых колебания строго гармонические. Однако это верно лишь до тех пор, пока емкость конденсатора и индуктивность катушки можно считать постоянными, т. е. не зависящими от заряда и тока. Конденсатор с диэлектриком и катушка с сердечником, строго говоря, представляют собой нелинейные элементы. Когда конденсатор заполнен сегнетоэлектриком, т. е. веществом, диэлектрическая проницаемость которого сильно зависит от приложенного электрического поля, емкость конденсатора уже нельзя считать постоянной. Аналогично, индуктивность катушки с ферромагнитным сердечником зависит от силы тока, так как ферромагнетик обладает свойством магнитного насыщения.

Если в механических колебательных системах массу, как правило, можно считать постоянной и нелинейность возникает только из-за нелинейного характера действующей силы, то в электромагнитном колебательном контуре нелинейность может возникать как за счет конденсатора (аналога упругой пружины), так и за счет катушки индуктивности (аналога массы). ▲

- Почему для колебательного контура с двумя параллельными конденсаторами (рис. 164) неприменима идеализация, в которой система считается консервативной?
- Почему быстрые колебания, приводящие к диссипации энергии колебаний в контуре на рис. 164, не возникали в контуре с двумя последовательными конденсаторами, показанными на рис. 162?
- Какие причины могут приводить к несинусоидальности электромагнитных колебаний в контуре?

§ 26. Вынужденные колебания в контуре. Резонанс

Выше рассматривались электромагнитные колебания в контуре, происходящие в отсутствие внешних воздействий. Внешнее воздействие сводилось лишь к сообщению некоторого начального заряда конденсатору, после чего система предоставлялась самой себе. Такое внешнее воздействие отражалось не в дифференциальном уравнении колебаний, а лишь в начальных условиях к нему. В реальных системах эти собственные колебания всегда затухают.

Вынужденными электромагнитными колебаниями, как и в механике, называют колебания в электрических цепях, происходящие при постоянно присутствующем внешнем воздействии.

Уравнение вынужденных колебаний в контуре. Рассмотрим RLC-контур, изображенный на рис. 165. Будем считать, что к нему приложено синусоидальное внешнее напряжение $U(t) = U_0 \cos \omega t$, частота ω которого в общем случае не совпадает с частотой ω_0 собственных колебаний в этом контуре. В последовательной цепи в каждый момент времени напряжение $U(t)$ равно сумме напряжений на отдельных элементах цепи:

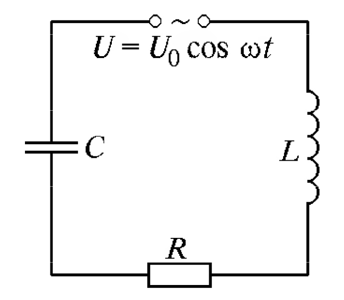


Рис. 165. Последовательный RLC-контур

$$U_L + U_R + U_C = U(t). \qquad (1)$$

Считая, что при выполнении условий квазистационарности сила тока I в один и тот же момент времени во всех участках контура одинакова, можем подставить в (1) $U_C = q/C$, $U_R = IR$ и $U_L = L\dot{I} = L\ddot{q}$:

$$L\ddot{q} + R\dot{q} + q/C = U_0 \cos \omega t. \qquad (2)$$

Вводя такие же обозначения, как и при изучении собственных колебаний:

$$\omega_0^2 = 1/LC, \qquad 2\gamma = R/L, \qquad f_0 = U_0/L, \qquad (3)$$

перепишем уравнение (2) в виде

$$\ddot{q} + 2\gamma\dot{q} + \omega_0^2 q = f_0 \cos \omega t. \qquad (4)$$

Уравнение (4) для заряда конденсатора $q(t)$ имеет точно такой же вид, что и уравнение вынужденных колебаний механического осциллятора с собственной частотой ω_0 и затуханием γ, происходящих под действием синусоидальной внешней силы:

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = f_0 \cos \omega t, \quad f_0 = F_0/m.$$

Установившиеся колебания в контуре. Предыдущее утверждение означает, что вынужденные колебания заряда конденсатора происходят точно так же, как и вынужденные колебания механического осциллятора. Как и в механических системах, в колебательном контуре под действием синусоидального приложенного напряжения в конце концов устанавливаются колебания, которые также происходят по синусоидальному закону на частоте приложенного напряжения ω, с некоторой постоянной амплитудой и некоторым сдвигом по фазе относительно приложенного напряжения. Такие колебания называются *установившимися*.

Все характеристики установившихся колебаний заряда конденсатора $q(t)$ (т. е. амплитуду и сдвиг по фазе) можно найти, как и в механике, методом векторных диаграмм. Однако в этом нет необходимости. Мы уже рассматривали в § 22 при изучении переменного тока процессы в цепи, показанной на рис. 165, и нашли характер

изменения силы тока $I(t)$ под действием приложенного напряжения $U(t) = U_0 \cos \omega t$ в режиме установившихся колебаний:

$$I(t) = I_0 \cos (\omega t - \varphi), \tag{5}$$

$$I_0 = \frac{U_0}{\sqrt{R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2}}, \tag{6}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\omega L - 1/\omega C}{R}. \tag{7}$$

Выражения (5)–(7) дают установившееся решение дифференциального уравнения для силы тока. Это уравнение можно получить из уравнения (2) почленным дифференцированием по t:

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + I/C = -U_0\omega \sin \omega t. \tag{8}$$

Таким образом, рассматривая в § 22 процессы в цепях синусоидального переменного тока, мы фактически изучали установившиеся колебания под действием синусоидального приложенного внешнего напряжения. В частности, там были рассмотрены резонансные явления в таких цепях. Когда внешнее напряжение подается на последовательно соединенные конденсатор и катушку индуктивности (рис. 165), возможен резонанс напряжений, при котором, как мы видели, напряжения на реактивных элементах цепи могут превышать приложенное напряжение. Когда внешнее напряжение подается на параллельно соединенные конденсатор и катушку (см. рис. 141), возможен резонанс токов, при котором токи в отдельных реактивных элементах могут значительно превышать ток в подводящих проводах.

Резонансный контур. Остановимся на резонансных явлениях несколько подробнее. В тех случаях, когда электрическая цепь содержит однотипные реактивные элементы (только конденсаторы или только катушки), в ней может запасаться энергия одного вида — только электрическая или только магнитная. Никаких собственных колебаний в таких случаях быть не может. Вынужденные колебания (переменный ток) в таких цепях, разумеется, возможны, но никаких резонансных явлений быть не может.

Резонансные явления происходят только в цепях, где возможны собственные колебания. Резонанс наступает, когда частота ω внешнего синусоидального воздействия приближается к собственной частоте $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

Рассмотрим для определенности резонанс в последовательном контуре (см. рис. 165). В отличие от механического осциллятора, где наибольший интерес представляло смещение $x(t)$ из положения равновесия (которое является аналогом заряда конденсатора $q(t)$), в электрической цепи больший интерес представляет сила тока $I(t)$, которая является аналогом скорости $\dot{x}(t)$ механического осциллятора.

Резонансные кривые. Рассмотрим зависимость амплитуды I_0 установившегося тока от частоты ω приложенного напряжения. Непосредственно из формулы (6) видно, что амплитуда тока обращается в нуль как при $\omega \to 0$, так и при $\omega \to \infty$, и достигает максимального значения при обращении в нуль выражения в скобках в формуле (6), что соответствует точному совпадению частоты приложенного напряжения с собственной частотой:

$$\omega L - 1/(\omega C) = 0,$$

откуда

$$\omega^2 = 1/(LC) = \omega_0^2. \quad (9)$$

Из формулы (7) видно, что при резонансе, когда $\omega = \omega_0$, отсутствует сдвиг фазы φ между приложенным напряжением и током. Выражаемые формулами (6) и (7) зависимости амплитуды установившегося тока и сдвига фазы от ω показаны на рис. 166.

Зависимость амплитуды заряда конденсатора от частоты приложенного напряжения также имеет резонансный характер. Резонанс-

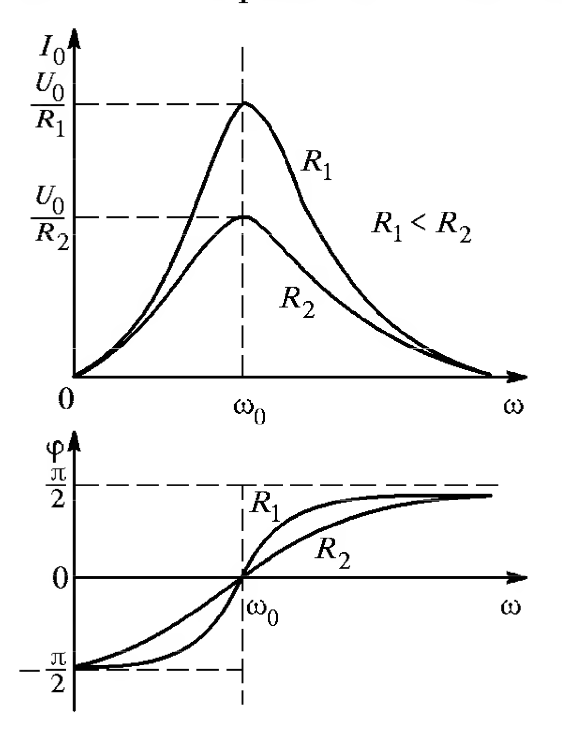


Рис. 166. Амплитуда силы тока и сдвиг фазы при установившихся вынужденных колебаниях в последовательном RLC-контуре

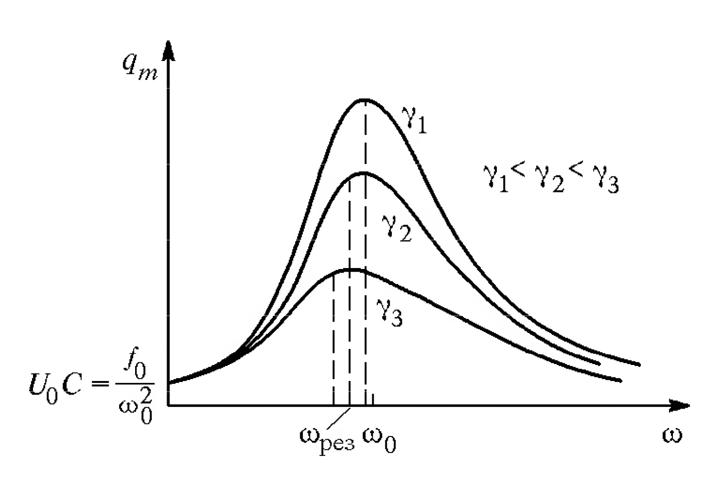


Рис. 167. Зависимость амплитуды заряда при установившихся вынужденных колебаниях от частоты приложенного напряжения

ная кривая для заряда в общих чертах похожа на резонансную кривую для тока, но отличается от нее в некоторых отношениях (рис. 167). Во-первых, максимум амплитуды, даваемый формулой

$$q_m = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}, \quad (10)$$

приходится на частоту

$$\omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}, \quad (11)$$

где f_0 и γ определяются формулами (3). Резонансная частота $\omega_{\text{рез}}$ оказывается меньше частоты свободных колебаний в контуре. При слабом затухании, когда $\gamma \ll \omega_0$, можно считать, что резонансная частота для заряда практически совпадает с ω_0. При стремлении частоты приложенного напряжения к нулю, т. е. при $\omega \ll \omega_0$, амплитуда $q_m = f_0/\omega_0^2$, что при подстановке значений f_0 и ω_0 дает CU_0, как это и должно быть.

Амплитуду вынужденных колебаний заряда в резонансе $q_{\text{рез}}$ находим, подставляя частоту $\omega_{\text{рез}}$ из (11) в выражение (10):

$$q_{\text{рез}} = \frac{f_0}{2\gamma\sqrt{\omega_0^2 - 2\gamma^2}} \approx \frac{f_0}{2\gamma\omega_0} = \frac{U_0}{\omega_0 R}. \qquad (12)$$

Амплитуда колебаний заряда в резонансе тем больше, чем меньше затухание γ. Вблизи резонанса затуханием пренебрегать нельзя, как бы мало оно ни было: только при учете затухания амплитуда в резонансе получается конечной. Интересно сравнить значение q_m в резонансе с зарядом $q = CU_0$ при постоянном приложенном напряжении U_0. Составляя отношение $q_{\text{рез}}$ к CU_0, получаем

$$\frac{q_{\text{рез}}}{CU_0} = \frac{\omega_0}{2\gamma} = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 RC}. \qquad (13)$$

Если подставить в (13) $\omega_0 = 2\pi/T$ и учесть, что $1/\gamma = \tau$ есть время жизни собственных затухающих колебаний в данном контуре, то отношение $q_{\text{рез}}/(CU_0)$ можно представить в виде

$$\frac{q_{\text{рез}}}{CU_0} = \pi\,\frac{\tau}{T}. \qquad (14)$$

Но τ/T есть число собственных колебаний, совершающихся в контуре за время жизни колебаний τ. Таким образом, резонансные свойства RLC-контура характеризуются тем же параметром (добротностью контура), что и собственные затухающие колебания в нем.

Энергетические превращения при вынужденных колебаниях. Чем сильнее выражены резонансные свойства контура, тем большую энергию колебаний запасает он при резонансном внешнем воздействии. Естественно, что для достижения установившегося режима в этом случае требуется большее время, чем для установления колебаний при частотах, далеких от резонансной. Если после установления резонансных колебаний прекратить внешнее воздействие, колебания в контуре будут затухать с превращением электромагнитной энергии колебаний в джоулеву теплоту, выделяющуюся на сопротивлении R. Такой процесс займет столько же времени, сколько требовалось на «раскачку» контура, т. е. на достижение установившегося режима.

- Поясните вывод уравнения (2) для вынужденных колебаний заряда конденсатора колебательного контура.
- Что такое установившиеся вынужденные колебания?
- Получите выражение для амплитуды и сдвига фазы установившихся вынужденных колебаний заряда конденсатора, решая уравнение (4) методом векторных диаграмм. Покажите, что эти выражения согласуются с формулами (6) и (7) для соответствующих величин, характеризующих колебания силы тока в цепи.
- Объясните, почему резонансные явления возможны только в электрических цепях, содержащих оба вида реактивных элементов, т. е. и конденсаторы, и катушки индуктивности.
- С помощью метода векторных диаграмм получите установившееся решение уравнения (4) для вынужденных колебаний заряда конденсатора и покажите, что амплитуда и резонансная частота даются формулами (10) и (11). Постройте график сдвига фазы между приложенным напряжением и зарядом конденсатора.
- Что вы можете сказать о зависимости отношения $q_{\text{рез}}/CU_0$ (формула (13)) от частоты ω_0 собственных колебаний в контуре: это отношение пропорционально или обратно пропорционально ω_0?
- Основываясь на аналогии с механическими колебаниями, покажите, что характерное время установления резонанса в колебательном контуре совпадает со временем $\tau = 1/\gamma$ жизни затухающих собственных колебаний в этом контуре.

Δ **Поглощаемая мощность.** При установившихся колебаниях энергия внешнего источника расходуется лишь на их поддержание, т. е. на компенсацию джоулевых потерь в контуре. Поэтому поглощаемая контуром мощность (равная в среднем за период колебаний подводимой к нему мощности), пропорциональна квадрату амплитуды установившегося тока. Действительно, записав на основании закона Джоуля—Ленца выражение для мощности P тепловых потерь

$$P(t) = I^2(t)\,R$$

и подставив в него установившееся значение силы тока $I(t)$ из (5) и (6), получим

$$P(t) = I_0^2 R \cos\,(\omega t - \varphi) = \frac{1}{2}\,I_0^2 R\,[1 + \cos 2(\omega t - \varphi)],$$

что после усреднения по времени за период колебаний дает

$$P = \frac{1}{2}\,I_0^2 R. \qquad (15)$$

Подставляя сюда амплитуду I_0 из (6), получим зависимость поглощаемой контуром мощности от частоты ω приложенного

напряжения:

$$P(\omega) = \frac{U_0^2}{2R}\,\frac{1}{1+(\omega^2-\omega_0^2)^2L^2/(R\omega)^2}. \qquad (16)$$

Как видно из (16), поглощаемая мощность максимальна при $\omega = \omega_0$ и равна $U_0^2/(2R)$, как если бы все внешнее напряжение было приложено непосредственно к резистору.

Для контура с малым затуханием и, следовательно, с резко выраженными резонансными свойствами поглощаемая мощность заметно отлична от нуля лишь вблизи резонанса, т. е. при частотах ω, близких к собственной частоте ω_0. В этом случае удобно ввести расстройку $\Delta\omega = \omega - \omega_0$, т. е. отсчитывать частоту от ее резонансного значения. Тогда разность квадратов в знаменателе формулы (16) можно представить в виде

$$\omega^2 - \omega_0^2 \approx 2\omega_0\,\Delta\omega,$$

после чего (16) записывается следующим образом:

$$P\ (\Delta\omega) = \frac{U_0^2}{2R}\,\frac{1}{1+(\Delta\omega)^2\tau^2}, \qquad (17)$$

где $\tau = 1/\gamma = 2L/R$. Форма резонансной кривой для поглощаемой мощности $P(\Delta\omega)$, выражаемой формулой (17), часто встречается в физике и называется *лоренцевским контуром*. График этой зависимости показан на рис. 168. Он симметричен относительно оси ординат, имеет характерную колоколообразную форму. Ширина этой кривой на половине максимальной высоты может служить характеристикой остроты резонанса. Из формулы (17) сразу видно, что мощность уменьшается вдвое, когда второе слагаемое в знаменателе равно единице, т. е. при расстройке $\Delta\omega = 1/\tau = \gamma = R/(2L)$. Таким образом, ширина резонансной кривой равна $2\gamma = R/L$.

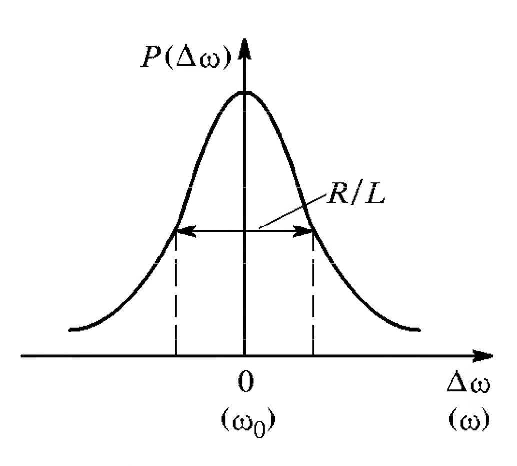


Рис. 168. Лоренцевский контур, описывающий поглощаемую мощность

Но резонансные свойства колебательного контура характеризуются, строго говоря, не абсолютным значением ширины кривой, а безразмерным отношением резонансной частоты ω_0 к ширине 2γ. Эта характеристика контура очень широко используется в радиотехнике и называется *добротностью* Q:

$$Q = \frac{\omega_0}{2\gamma} = \pi\,\frac{\tau}{T}. \qquad (18)$$

Как видно, например, из формулы (14), эта характеристика колебательной системы уже не раз неявно фигурировала в полученных нами результатах, касающихся как собственных, так и вынужденных колебаний осциллятора. ▲

- На что расходуется поступающая в колебательную систему энергия внешнего источника при установившихся колебаниях и в процессе их раскачки?
- При собственных колебаниях в контуре средние значения электрической энергии конденсатора и магнитной энергии катушки равны между собой. Что можно сказать об этих средних значениях при установившихся вынужденных колебаниях?
- Почему при установившихся вынужденных колебаниях мощность, поступающая в контур от внешнего источника, равна мощности джоулевых потерь лишь в среднем за период, а не в каждый момент времени?
- Что такое лоренцевский контур? Какое отношение имеет он к вынужденным электромагнитным колебаниям?
- Что такое добротность колебательного контура? Приведите все рассмотренные в тексте физические эффекты, при описании которых она фигурировала (явно или неявно)?

§ 27. Незатухающие электромагнитные колебания

До сих пор мы изучали колебательные системы, в которых происходили либо свободные электромагнитные колебания, определяемые начальными условиями, которые в реальных системах всегда затухают, либо вынужденные, происходящие под действием приложенного внешнего синусоидального напряжения. Однако незатухающие колебания возможны не только при периодическом внешнем воздействии, но и в некоторых других случаях — в так называемых автоколебательных и параметрических системах.

Автоколебания отличаются от остальных колебательных процессов тем, что для их поддержания не требуется периодических воздействий извне. Незатухающие колебания поддерживаются благодаря способности автоколебательных систем управлять поступлением энергии от постоянного источника. Форма, амплитуда и частота колебаний задаются самой системой. Примеры автоколебаний — колебания воздуха в органной трубе при поступлении в нее равномерного потока воздуха, колебания силы тока в контуре радиотехнического генератора, колебания маятника или баланса в механических часах.

Параметрические колебания возможны при периодическом изменении какого-либо параметра колебательной системы — длины маятника, жесткости пружины осциллятора, емкости конденсатора колебательного контура и т. п. Характерным примером такого возбуждения колебаний, называемого *параметрическим резонансом*, может служить раскачивание качелей, когда находящийся на них

человек регулярно приседает и выпрямляется, периодически перемещая тем самым положение центра масс системы.

Автоколебания. Характерные элементы автоколебательной системы, или, как говорят, генератора незатухающих колебаний, — это резонатор, источник энергии и обратная связь между резонатором и источником энергии. *Резонатор* представляет собой систему, в которой могут происходить собственные затухающие колебания. Примерами резонаторов могут служить маятник настенных часов или баланс наручных, колебательный контур в ламповом генераторе, струна в смычковом музыкальном инструменте.

Обратная связь представляет собой устройство, с помощью которого генератор сам регулирует поступление энергии от источника. Иначе говоря, благодаря обратной связи осуществляется воздействие результатов процесса на само его течение. В автоколебательных системах обратная связь приводит к усилению интенсивности процесса. Такая обратная связь называется *положительной*. В системе происходит раскачивание собственных колебаний, т. е. *самовозбуждение*.

Обратная связь в приведенных примерах осуществляется анкерным механизмом в часах катушкой обратной связи в генераторе электромагнитных колебаний, индуктивно связанной с колебательным контуром.

Наличие затухания в резонаторе приводит к диссипации энергии колебаний. Однако обратная связь обеспечивает необходимое восполнение энергии, так что амплитуда колебаний нарастает до тех пор, пока потери меньше, чем вносимая в систему энергия. С увеличением амплитуды колебаний вследствие нелинейных свойств системы это поступление энергии ограничивается и при некоторой амплитуде сравнивается с потерями. Как и при вынужденных колебаниях под действием периодической внешней силы, при автоколебаниях, независимо от начального состояния, в конце концов устанавливается стационарный режим колебаний с определенной частотой и амплитудой. Но в отличие от установившихся вынужденных колебаний, где частота и амплитуда определяются внешним воздействием, в случае автоколебаний как частота, так и амплитуда определяются только свойствами самой системы.

Механическая модель автоколебательной системы. Автоколебания возможны только при наличии положительной обратной связи в нелинейных физических системах. Поэтому анализ уравнений, описывающих даже самые простые реальные автоколебательные системы, представляет собой сложную задачу. Мы рассмотрим упрощенную модель автоколебательной системы, допускающую сравнительно простое исследование — модель обыкновенных часов с маятником или балансом в качестве осциллятора, способного совершать собственные затухающие колебания. Принцип работы часов заключается в том, что при колебаниях маятни-

ка в поле тяжести или крутильных колебаниях баланса на спиральной пружине осциллятор получает короткий толчок от заведенной пружины в направлении своего движения, который немного увеличивает его скорость.

Фазовая траектория. Действие часов легко проиллюстрировать с помощью фазовой диаграммы, на которой по оси абсцисс отложено смещение осциллятора из положения равновесия, а по оси ординат — его скорость (или импульс). При изменении состояния осциллятора изображающая точка на фазовой плоскости описывает некоторую траекторию. В отсутствие обратной связи фазовая траектория представляла бы собой скручивающуюся спираль, соответствующую затухающим колебаниям (рис. 169*а*). В стационарном режиме установившихся колебаний фазовая траектория замкнута и при двух «подталкиваниях» за период имеет вид, показанный на рис.169*б*. Дважды за период, в моменты прохождения через положение равновесия осциллятор сам «отпирает» канал обратной связи, по которому энергия заведенной пружины передается осциллятору. На фазовой диаграмме этому соответствуют практически вертикальные изломы траектории, описывающие мгновенные увеличения скорости на некоторую величину.

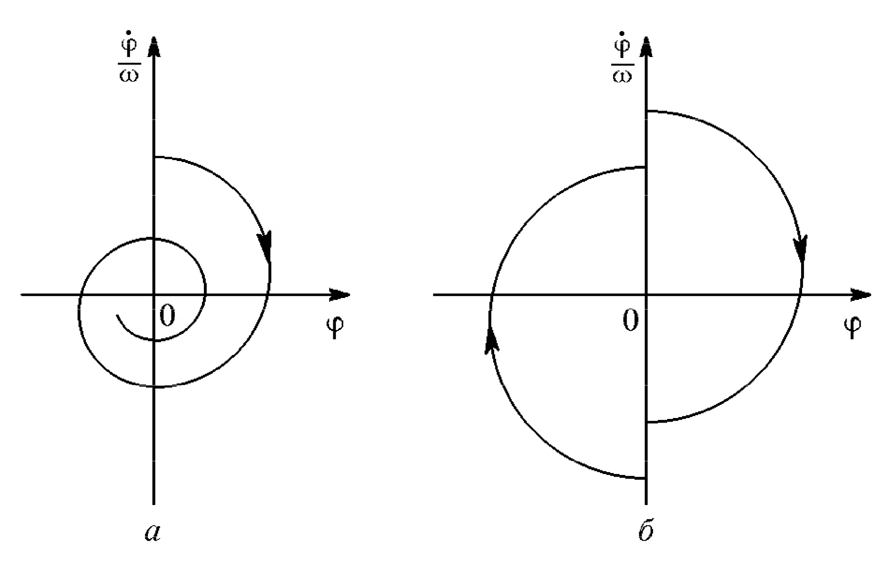


Рис. 169. Фазовая траектория собственных затухающих колебаний осциллятора (*а*) и установившихся автоколебаний в идеализированной модели часов (*б*)

При высокодобротном осцилляторе, собственные колебания которого затухают слабо и, следовательно, потери энергии за период невелики, размер этих вертикальных участков мал по сравнению с размером фазовой траектории. Это значит, что автоколебания в такой системе будут почти гармоническими. Частота этих автоколебаний практически совпадает с частотой собственных затухающих колебаний.

Амплитуда установившихся автоколебаний. Амплитуда установившихся колебаний также определяется свойствами самой системы. Значение этой амплитуды можно определить из условия, что

в стационарном режиме уменьшение скорости из-за трения за половину периода должно в точности компенсироваться ее увеличением при получаемом от пружины толчке. Обозначим увеличение угловой скорости осциллятора за один толчок через Ω. Амплитуда скорости, равная произведению частоты колебаний ω на амплитуду A отклонения от равновесия, при затухающих колебаниях убывает как $e^{-\gamma t}$. Поэтому для определения амплитуды A приравняем уменьшение амплитуды скорости за половину периода $T/2$ увеличению скорости Ω при толчке:

$$A\omega - A\omega\, e^{-\gamma T/2} = \Omega,$$

откуда

$$A = \frac{\Omega}{\omega}\,\frac{1}{1 - e^{-\gamma T/2}}. \qquad (1)$$

При слабом затухании, когда $\gamma T \ll 1$, формулу (1) для стационарной амплитуды можно упростить, воспользовавшись приближенным соотношением $e^x \approx 1 + x$ при $x \ll 1$. Учитывая, что $\omega = 2\pi/T$, получаем

$$A \approx \Omega/\pi\gamma. \qquad (2)$$

Видно, что амплитуда A установившихся автоколебаний тем больше, чем сильнее толчки (чем сильнее заведена пружина) и чем меньше затухание γ собственных колебаний осциллятора.

Устойчивость автоколебаний. Режим установившихся автоколебаний характеризуется устойчивостью. При любых отклонениях амплитуды как под действием случайных, так и преднамеренных причин реакция системы такова, что амплитуда возвращается к своему установившемуся значению. Подтолкнем маятник настенных часов, чтобы размах его колебаний стал больше. Вы увидите, что буквально через несколько колебаний амплитуда станет такой же, как и прежде.

Устойчивость режима установившихся автоколебаний легко понять из энергетических соображений, учитывая, что должен обеспечиваться баланс поступающей от пружины и рассеиваемой энергии за период колебаний. Если амплитуда колебаний вдруг станет больше, то возрастут и потери энергии за период, превысив поступление энергии. И наоборот, уменьшение амплитуды от установившегося значения приводит к превышению поступающей энергии над потерями на трение. Амплитуда начнет увеличиваться.

Предельный цикл. Устойчивость установившихся автоколебаний можно понять, рассматривая процесс выхода системы на предельный цикл, которому соответствует замкнутая фазовая траектория на рис. 169*б*. Если, например, отклонить осциллятор автоколебательной системы на небольшой угол и отпустить без начального толчка, выход фазовой траектории на предельный цикл будет происходить так, как

показано на рис. 170*а*. Фазовая траектория постепенно приближается к предельному циклу изнутри. Напротив, если начальное отклонение

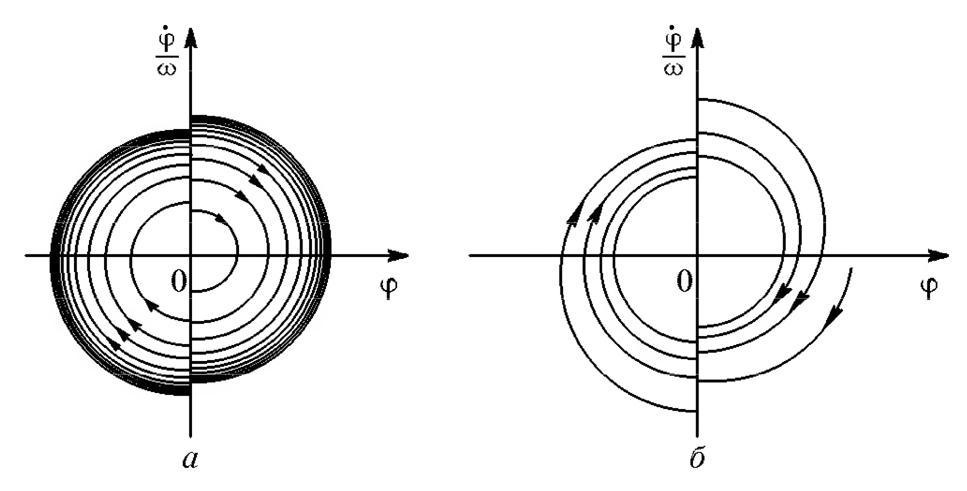


Рис. 170. Выход фазовой траектории на предельный цикл, соответствующий установившимся автоколебаниям

превышает значение установившейся амплитуды, фазовая траектория приближается к предельному циклу извне (рис. 170*б*).

Электромагнитные автоколебания. Действие генератора незатухающих электромагнитных колебаний аналогично рассмотренному механическому примеру автоколебательной системы. Схема такого генератора на транзисторе с колебательным контуром в цепи коллектора показана на рис. 171. Роль заводной пружины, пополняющей энергию колебаний, играет постоянный источник энергии — батарея. Колебательный контур управляет этим источником через цепь обратной связи, содержащую индуктивно связанную с ним катушку $L_{св}$, включенную в цепь эмиттера. Транзистор здесь играет роль вентиля, открывающего доступ энергии батареи в колебательный контур. Управление этим вентилем осуществляется подаваемым с катушки $L_{св}$ напряжением к переходу эмиттер—база. Благодаря этому отпирание транзистора происходит в нужные моменты времени, чтобы импульс тока от батареи пополнял энергию колебаний, компенсируя потери на сопротивлении катушки и проводов.

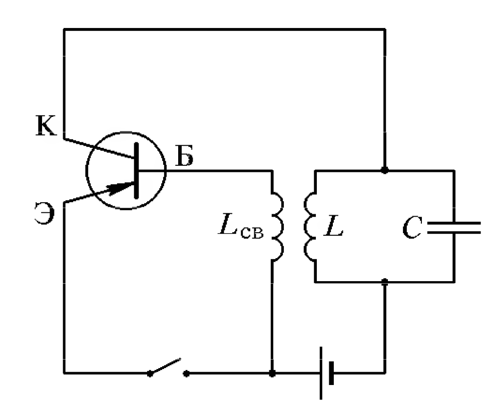


Рис. 171. Генератор незатухающих электромагнитных колебаний на транзисторе

Параметрический резонанс. Еще один способ возбуждения незатухающих колебаний, как отмечалось в начале этого параграфа, заключается в периодическом изменении какого-либо параметра колебательной системы. Пусть в колебательном контуре конденсатор устроен так, что можно изменять его емкость, например сближая или раздви-

гая пластины, и пусть в контуре уже существуют колебания небольшой амплитуды. В тот момент, когда заряд на пластинах конденсатора максимален, раздвинем мгновенно пластины, немного уменьшив тем самым его емкость. При этом придется совершить некоторую работу, которая пойдет на увеличение электростатической энергии.

В момент, когда ток в контуре максимален, а конденсатор полностью разряжен, сблизим пластины до прежнего расстояния. При этом никакой работы не совершается, и электромагнитная энергия контура остается прежней. Еще через четверть периода колебаний, когда заряд снова достигнет максимального значения (в противоположной полярности), опять раздвинем пластины, добавив тем самым еще порцию энергии, и т. д. Таким образом, периодически изменяя емкость конденсатора в нужные моменты времени, можно добиться раскачки электромагнитных колебаний, если добавляемая за период энергия превосходит потери в контуре за то же время. Такой способ возбуждения колебательной системы называется параметрическим возбуждением контура или *параметрическим резонансом.*

В отличие от вынужденных колебаний под действием периодической вынуждающей силы, когда резонанс происходит при совпадении частоты вынуждающей силы с собственной частотой, параметрический резонанс возможен при частоте изменения параметра, вдвое превышающей собственную: $\omega = 2\omega_0$. Параметрическая раскачка колебаний может также происходить, когда параметр изменяется не только дважды за период собственных колебаний, но и когда он изменяется один раз за период, два раза за три периода, один раз за два периода, и т. д.

Порог параметрического резонанса. Параметрический резонанс представляет собой *пороговый эффект*, так как он наступает только тогда, когда поступление энергии превосходит потери, т. е. амплитуда изменения параметра превышает некоторое пороговое значение. В линейной колебательной системе при превышении порога происходит неограниченное нарастание амплитуды колебаний. Связано это с тем, что при параметрическом резонансе и потери, и поступление энергии пропорциональны квадрату амплитуды.

Этим параметрический резонанс в линейной системе отличается от вынужденных колебаний при силовом воздействии, где поступление энергии пропорционально первой степени амплитуды, а потери — по-прежнему квадрату амплитуды, что приводит, как мы видели, к конечной амплитуде установившихся вынужденных колебаний. При параметрическом резонансе рост амплитуды ограничен только нелинейными свойствами колебательной системы.

Параметрический резонанс и вынужденные колебания. При непосредственном силовом воздействии энергия возбужденных колебаний возникает за счет работы внешней силы, совершаемой при движении системы. При параметрическом воздействии увеличение за-

паса энергии колебаний происходит обязательно с превращением энергии одного вида в другой. Так, например, механическая работа, производимая при изменении емкости конденсатора в моменты раздвижения его пластин, приводит к изменению запаса электростатической энергии и, следовательно, общего запаса энергии колебаний в контуре. Заметим, что параметрическое возбуждение колебаний возможно лишь при изменении одного из энергоемких параметров, C или L, с которыми связана энергия электрического и магнитного поля. Очевидно, что изменение диссипативного параметра R не может вызвать раскачки колебаний.

В заключение отметим еще раз основные различия вынужденных колебаний и параметрического резонанса. Резонанс при вынужденных колебаниях возникает при $\omega \approx \omega_0$ (или $\omega = \omega_0/n$ с целым n при возбуждении короткими толчками), но сами колебания существуют при любой частоте внешнего воздействия. В случае параметрического воздействия колебания возникают лишь при выполнении соотношения $\omega \approx 2\omega_0/n$. Резонанс при вынужденных колебаниях вызывает любая, сколь угодно малая внешняя сила. Для возникновения параметрического резонанса амплитуда внешнего воздействия должна превышать некоторое пороговое значение.

- В чем заключается принципиальное отличие автоколебаний и параметрических колебаний от вынужденных колебаний осциллятора? Чем они отличаются друг от друга?
- Приведите известные вам примеры автоколебательных систем. Какие элементы должна обязательно содержать автоколебательная система? Каковы их функции? Что такое обратная связь?
- При каких условиях установившиеся автоколебания будут почти синусоидальными? От чего зависит их частота и амплитуда?
- Что такое предельный цикл на фазовой диаграмме? Докажите, что при любых начальных условиях в рассмотренной механической модели автоколебательной системы фазовая траектория постепенно приближается к предельному циклу изнутри или извне, нигде его не пересекая.
- Объясните подробно, каким образом в генераторе незатухающих электромагнитных колебаний транзистор через катушку обратной связи обеспечивает поступление импульсов тока от батареи как раз в те моменты времени (и в нужном направлении), когда ток в катушке L колебательного контура максимален. Что будет, если переключить (поменять местами) концы одной из этих катушек?
- Постройте примерный график зависимости заряда конденсатора от времени при параметрической раскачке колебаний, вызванной периодическими изменениями емкости.
- Почему для возникновения параметрического резонанса амплитуда изменения параметра должна превышать некоторое пороговое значение?
- Покажите, что при параметрическом резонансе рост амплитуды колебаний ограничивается нелинейными свойствами системы, например, неизохронностью (зависимостью периода собственных колебаний от амплитуды).

△ **Релаксационные колебания.** Во всех упоминавшихся выше примерах автоколебательных систем обязательным элементом являлся резонатор. Другими словами, в отсутствие обратной связи в этих системах возможны собственные затухающие колебания. При наличии обратной связи в них устанавливаются самоподдерживающиеся почти синусоидальные колебания. Частота таких колебаний задается резонатором.

Но автоколебания могут происходить и в системах, не содержащих резонатора. Колебания при этом, как правило, не являются

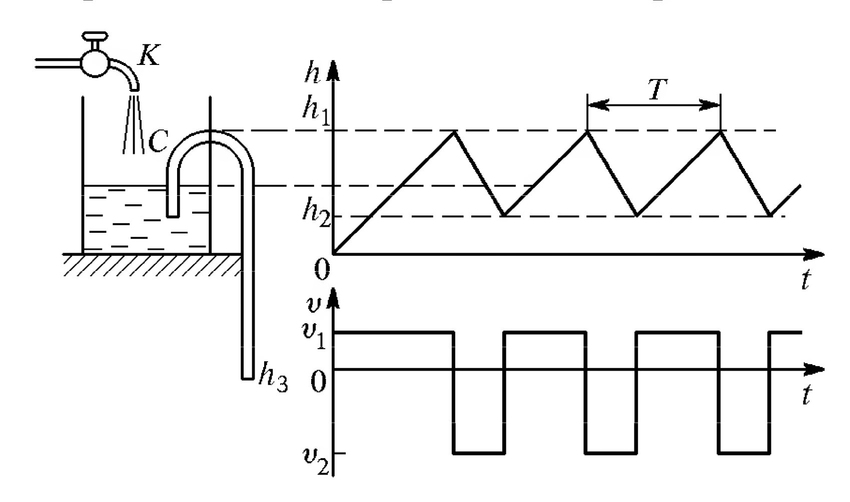


Рис. 172. Типичный пример релаксационных колебаний

гармоническими. Типичными примерами таких систем могут служить генератор пилообразных колебаний на неоновой лампе и гидравлическое устройство, показанное на рис. 172. В сосуд, снабженный сифоном C, с постоянной скоростью натекает вода из крана K. Пока сифон не заполнен водой, уровень воды в сосуде растет со временем по линейному закону. Но как только уровень достигает высоты h_1, сифон срабатывает и уровень воды в сосуде падает до значения h_2, после чего сосуд снова начинает заполняться водой из крана. Скорость опорожнения сосуда через сифон v_2 можно сделать гораздо больше скорости его наполнения через кран v_1, так как скорость воды в сифоне зависит от разности уровней h_2 и h_3. Далее описанный процесс будет повторяться периодически. Зависимости уровня воды h и скорости его изменения v от времени показаны в правой части рис. 172. Видно, что колебания уровня воды и скорости не являются синусоидальными. Соответствующая этим колебаниям фазовая диаграмма приведена на рис. 173.

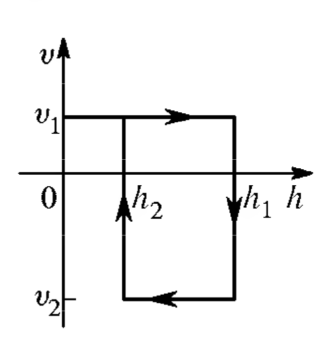


Рис. 173. Фазовая диаграмма релаксационных колебаний, показанных на рис. 172

Аналогичные процессы происходят в генераторе пилообразных колебаний на неоновой лампе. Его электрическая схема показана на рис. 174. Неоновая лампа $Л$ обладает тем свойством, что ток че-

рез нее не проходит до тех пор, пока приложенное к лампе напряжение не достигнет определенного значения, называемого напряжением зажигания $U_з$. Если после возникновения тлеющего разряда в лампе напряжение на ней несколько уменьшить, то лампа будет продолжать гореть. Ток через лампу прекратится лишь тогда, когда напряжение будет уменьшено до определенного значения, называемого напряжением гашения $U_г$.

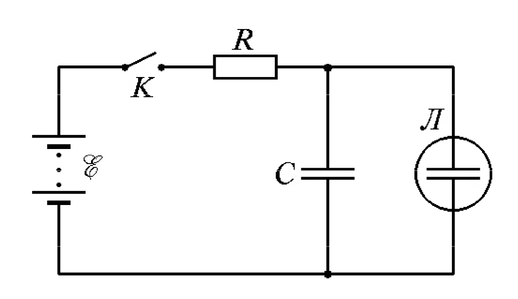


Рис. 174. Генератор пилообразных колебаний на неоновой лампе

При замыкании ключа конденсатор C начинает медленно заряжаться через сопротивление R. Как только напряжение на конденсаторе достигнет значения, равного напряжению зажигания лампы $U_з$, в лампе возникает газовый разряд и конденсатор начинает быстро разряжаться через лампу, так как сопротивление горящей неоновой лампы очень мало. Когда напряжение на конденсаторе уменьшится до значения гашения $U_г$, разряд в лампе прекращается и конденсатор опять начинает заряжаться. Затем все повторяется снова. График зависимости напряжения на конденсаторе от времени $U(t)$ приведен на рис. 175.

Автоколебания, происходящие в генераторе на неоновой лампе и рассмотренном выше гидравлическом устройстве, носят название *релаксационных*. Для таких колебаний характерно постепенное накопление энергии системой до некоторого значения, а затем быстрое «избавление» от накопленной энергии. Аналогом накопительного бачка в гидравлическом устройстве является конденсатор в генераторе пилообразного напряжения; аналогом сифона является неоновая лампа, а роль крана играет сопротивление R.

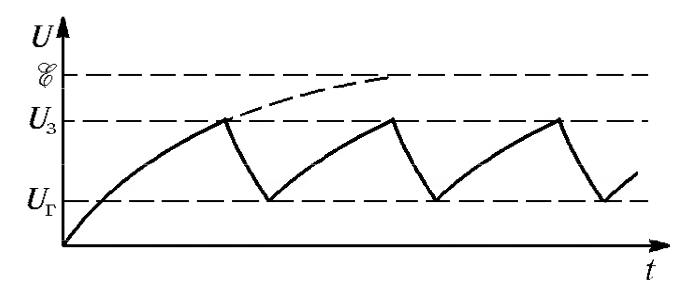


Рис. 175. Зависимость напряжения на конденсаторе от времени

Возможные типы автоколебаний не исчерпываются рассмотренными примерами. Форма колебаний не обязательно бывает синусоидальной или пилообразной — она может быть какой угодно. Это относится не только к автоколебаниям, но и ко всем колебаниям вообще, включая и собственные, и вынужденные. ▲

- Приведите известные вам примеры релаксационных колебаний.
- Сравните релаксационные колебания с автоколебаниями в системах, содержащих резонаторы, с точки зрения энергии, поступающей в систему за

период. Покажите, что в релаксационных колебаниях поступающая за период энергия сравнима (одного порядка) с полной энергией колебаний.

- Если период колебаний в системе с резонатором определяется параметрами этого резонатора, то какими факторами определяется период релаксационных колебаний?

§ 28. Электромагнитные волны

Многие закономерности волновых процессов имеют универсальный характер и в равной мере справедливы для волн различной природы: механических волн в упругой среде, волн на поверхности воды, в натянутой струне и т. д. Не являются исключением и *электромагнитные волны*, представляющие собой процесс распространения колебаний электромагнитного поля. Но в отличие от других видов волн, распространение которых происходит в какой-то материальной среде, электромагнитные волны могут распространяться в пустоте: никакой материальной среды для распространения электрического и магнитного полей не требуется. Однако электромагнитные волны могут существовать не только в вакууме, но и в веществе.

Предсказание электромагнитных волн. Существование электромагнитных волн было теоретически предсказано Максвеллом в результате анализа предложенной им системы уравнений, описывающих электромагнитное поле. Максвелл показал, что электромагнитное поле в вакууме может существовать и в отсутствие источников — зарядов и токов. Поле без источников имеет вид волн, распространяющихся с конечной скоростью $c = 3\cdot 10^{10}$ см/с, в которых векторы электрического и магнитного полей в каждый момент времени в каждой точке пространства перпендикулярны друг другу и перпендикулярны направлению распространения волн.

Экспериментально электромагнитные волны были открыты и изучены Герцем только спустя 10 лет после смерти Максвелла.

Открытый вибратор. Чтобы понять, каким образом можно получить электромагнитные волны на опыте, рассмотрим «открытый» колебательный контур, у которого обкладки конденсатора раздвинуты (рис. 176) и поэтому электрическое поле занимает большую область пространства. При увеличении расстояния между обкладками емкость C конденсатора убывает и в соответствии с формулой Томсона $\omega = 1/\sqrt{LC}$ возрастает частота собственных колебаний. Если еще и катушку индуктивности заменить отрезком провода, то уменьшится индуктивность L, а частота собственных колебаний возрастет еще больше. При этом не только электрическое, но и магнитное поле, которое раньше было заключено внутри катушки, теперь займет большую область пространства, охватывающую этот провод.

Увеличение частоты колебаний в контуре, как и увеличение его линейных размеров, приводит к тому, что период собственных ко-

лебаний становится сравнимым со временем распространения электромагнитного поля вдоль всего контура. Это означает, что процессы собственных электромагнитных колебаний в таком открытом конту-

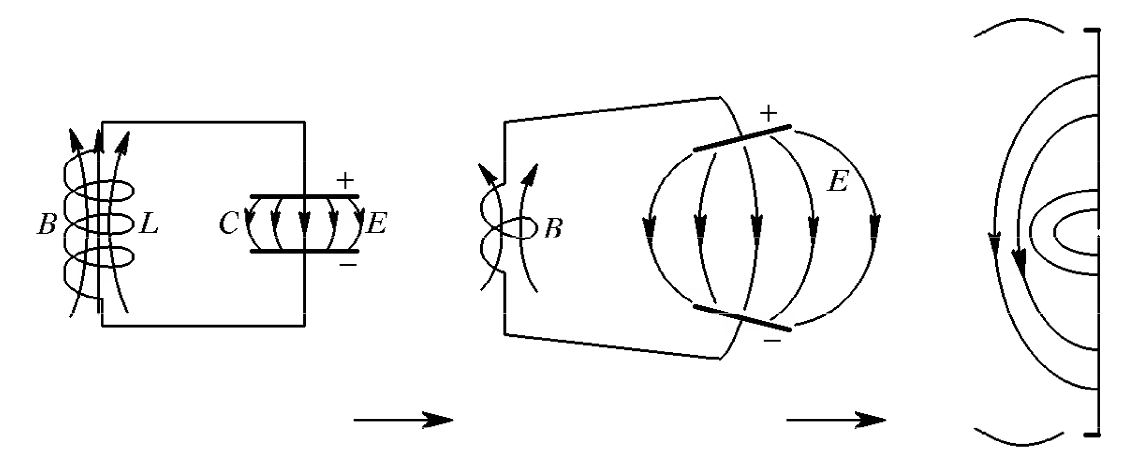


Рис. 176. Переход от колебательного контура к открытому вибратору

ре уже нельзя считать квазистационарными. Сила тока в разных его местах в один и тот же момент времени разная: на концах контура она всегда равна нулю, а в середине (там, где прежде была катушка) она осциллирует с максимальной амплитудой.

В предельном случае, когда колебательный контур превратился просто в отрезок прямого провода, распределение силы тока вдоль контура в некоторый момент времени показано на рис. 177*а*. В тот момент, когда сила тока в таком вибраторе максимальна, охватывающее его магнитное поле также достигает максимума, а электрическое поле вблизи вибратора отсутствует. Через четверть периода обращается в нуль сила тока, а вместе с ней и магнитное поле вблизи вибратора; электрические заряды сосредоточиваются вблизи концов вибратора, а их распределение имеет вид, показанный на рис. 177*б*. Электрическое поле вблизи вибратора в этот момент максимально.

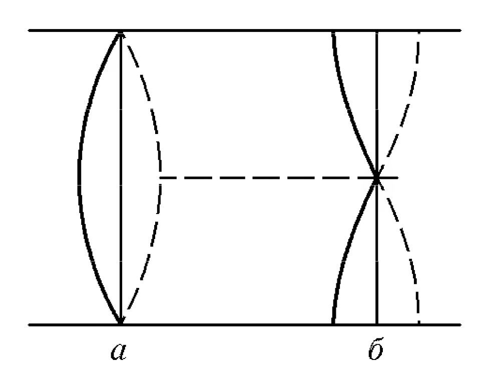


Рис. 177. Распределение вдоль открытого вибратора силы тока в момент, когда она максимальна (*а*), и распределение зарядов спустя четверть периода (*б*)

Эти колебания заряда и тока, т. е. электромагнитные колебания в открытом вибраторе, вполне аналогичны механическим колебаниям, которые могут происходить в пружине осциллятора, если убрать присоединенное к ней массивное тело. В этом случае придется учитывать массу отдельных частей пружины и рассматривать ее как распределенную систему, у которой каждый элемент обладает как упругими, так и инертными свойствами. В случае открытого электромагнитного вибратора каждый его элемент также одновременно обладает и индуктивностью, и емкостью.

Электрическое и магнитное поля вибратора. Неквазистационарный характер колебаний в открытом вибраторе приводит к тому, что создаваемые отдельными его участками поля на некотором расстоянии от вибратора уже не компенсируют друг друга, как это имеет место для «закрытого» колебательного контура с сосредоточенными параметрами, где колебания квазистационарны, электрическое поле целиком сосредоточено внутри конденсатора, а магнитное — внутри катушки. Из-за такого пространственного разделения электрического и магнитного полей они непосредственно не связаны друг с другом: их взаимное превращение обусловлено только током — переносом заряда по контуру.

У открытого вибратора, где электрическое и магнитное поля перекрываются в пространстве, происходит их взаимное влияние: изменяющееся магнитное поле порождает вихревое электрическое поле, а изменяющееся электрическое поле порождает магнитное поле. В результате оказывается возможным существование таких «самоподдерживающихся» и распространяющихся в свободном пространстве полей на большом расстоянии от вибратора. Это и есть излучаемые вибратором *электромагнитные волны*.

Опыты Герца. Вибратор, с помощью которого Г. Герцем в 1888 г. впервые были экспериментально получены электромагнитные волны, представлял собой прямолинейный проводник с небольшим воздушным промежутком посредине (рис. 178*а*). Благодаря такому промежутку можно было сообщить двум половинам вибратора значительные заряды. Когда разность потенциалов достигала определенного предельного значения, в воздушном зазоре возникал пробой (проскакивала искра) и электрические заряды через ионизированный воздух могли перетекать с одной половины вибратора на другую. В открытом контуре возникали электромагнитные колебания. Чтобы быстропеременные токи существовали только в вибраторе и не замыкались через источник питания, между вибратором и источником включались дроссели *Д* (см. рис. 178*а*).

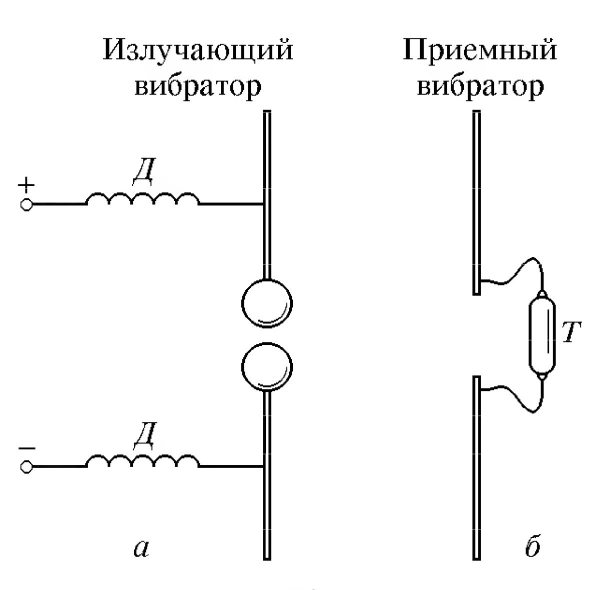


Рис. 178. Вибратор Герца

Высокочастотные колебания в вибраторе существуют, пока искра замыкает промежуток между его половинами. Затухание таких колебаний в вибраторе происходит в основном не за счет джоулевых потерь на сопротивлении (как в закрытом колебательном контуре), а за счет излучения электромагнитных волн.

Для обнаружения электромагнитных волн Герц применял второй (приемный) вибратор (рис. 178*б*). Под действием переменного электрического поля приходящей от излучателя волны электроны в приемном вибраторе совершают вынужденные колебания, т. е. в вибраторе возбуждается быстропеременный ток. Если размеры приемного вибратора такие же, как и у излучающего, то частоты собственных электромагнитных колебаний в них совпадают и вынужденные колебания в приемном вибраторе достигают заметной величины вследствие резонанса. Эти колебания Герц обнаруживал по проскакиванию искры в микроскопическом зазоре в середине приемного вибратора или по свечению миниатюрной газоразрядной трубки T, включенной между половинами вибратора.

Герц не только экспериментально доказал существование электромагнитных волн, но впервые начал изучать их свойства — поглощение и преломление в разных средах, отражение от металлических поверхностей и т. п. На опыте удалось также измерить скорость электромагнитных волн, которая оказалась равной скорости света.

Совпадение скорости электромагнитных волн с измеренной задолго до их открытия скоростью света послужило отправным пунктом для отождествления света с электромагнитными волнами и создания электромагнитной теории света.

Электромагнитная волна существует без источников полей в том смысле, что после ее излучения электромагнитное поле волны не связано с источником. Этим электромагнитная волна отличается от статических электрического и магнитного полей, которые не существуют в отрыве от источника.

Механизм излучения электромагнитных волн. Излучение электромагнитных волн происходит при ускоренном движении электрических зарядов. Понять, каким образом поперечное электрическое поле волны возникает из радиального кулоновского поля точечного заряда, можно с помощью следующего простого рассуждения, предложенного Дж. Томсоном.

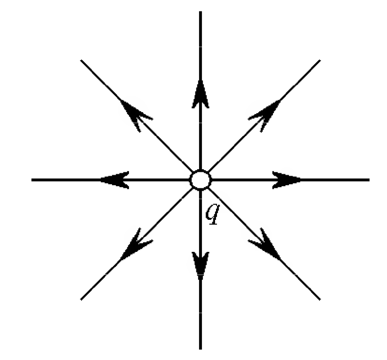


Рис. 179. Поле неподвижного точечного заряда

Рассмотрим электрическое поле, создаваемое точечным зарядом q. Если заряд покоится, то его электростатическое поле изображается радиальными силовыми линиями, выходящими из заряда (рис. 179). Пусть в момент времени $t = 0$ заряд под действием какой-то внешней силы начинает двигаться с ускорением a, а спустя некоторое время τ действие этой силы прекращается, так что дальше заряд движется равномерно со скоростью $v = a\tau$. График скорости движения заряда показан на рис. 180.

Представим себе картину линий электрического поля, создаваемого этим зарядом, спустя большой промежуток времени $t \gg \tau$. Поскольку электрическое поле распространяется со скоростью света c,

то до точек, лежащих за пределами сферы радиуса ct, изменение электрического поля, вызванное движением заряда, дойти не могло: за пределами этой сферы поле такое же, каким оно было при неподвижном заряде (рис. 181). Напряженность этого поля (в гауссовой системе единиц) равна

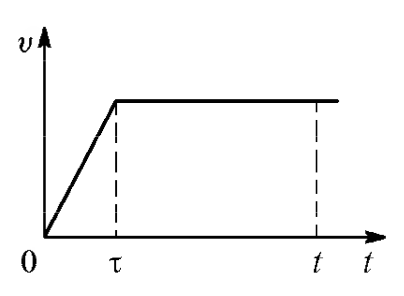


Рис. 180. График скорости заряда

$$E(r) = q/r^2. \tag{1}$$

Все изменение электрического поля, вызванное ускоренным движением заряда в течение времени τ, в момент времени t находится внутри тонкого шарового слоя толщины $c\tau$, наружный радиус которого равен ct, а внутренний — $c(t - \tau)$. Это показано на рис. 181. Внутри сферы радиуса $c(t - \tau)$ электрическое поле — это поле равномерно движущегося заряда. Если скорость заряда v много меньше скорости света c, то это поле

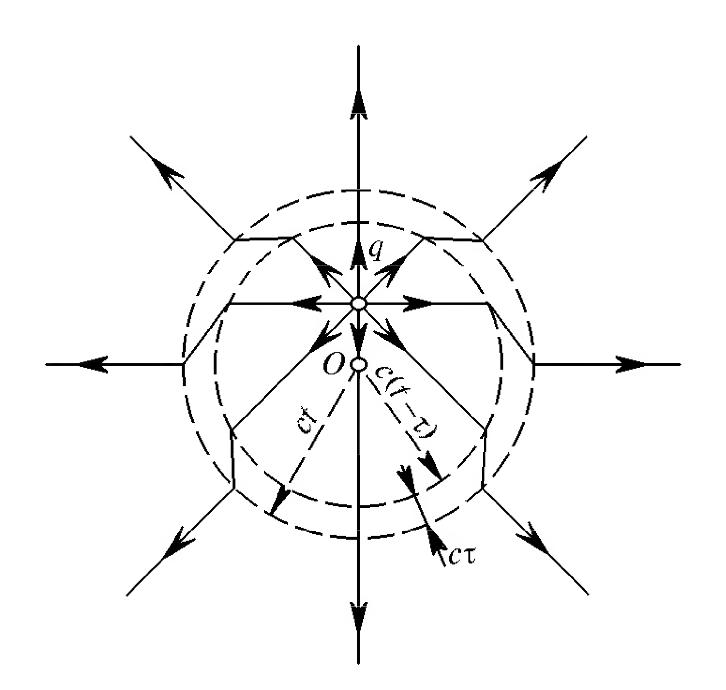


Рис. 181. Линии напряженности электрического поля заряда, движущегося согласно графику на рис. 180

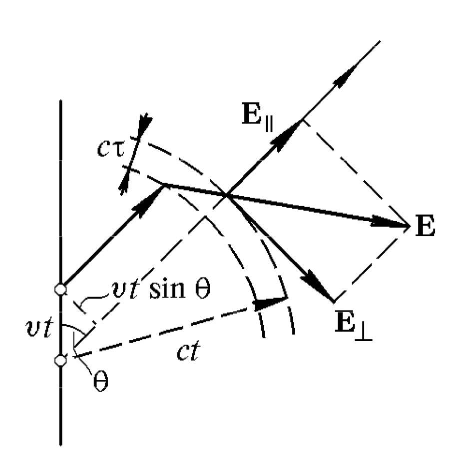


Рис. 182. К выводу формулы для напряженности поля излучения ускоренно движущегося заряда

в момент времени t совпадает с полем неподвижного точечного заряда q, находящегося на расстоянии vt от начала (рис. 181): поле медленно движущегося с постоянной скоростью заряда перемещается вместе с ним, а пройденное зарядом за время t расстояние, как видно из рис. 180, можно считать равным vt, если $t \gg \tau$.

Картину электрического поля внутри шарового слоя легко найти, учитывая непрерывность силовых линий. Для этого нужно соединить соответствующие радиальные силовые линии (рис. 181). Вызванный ускоренным движением заряда излом силовых линий «убегает» от заряда со скоростью c. Излом на силовых линиях между

сферами $r = ct$ и $r = c(t - \tau)$ — это и есть интересующее нас поле излучения, распространяющееся со скоростью c.

Чтобы найти поле излучения, рассмотрим одну из линий напряженности, составляющую некоторый угол θ с направлением движения заряда (рис. 182). Разложим вектор напряженности электрического поля в изломе $\mathbf{E}$ на две составляющие: радиальную $\mathbf{E}_{\parallel}$ и поперечную $\mathbf{E}_{\perp}$. Радиальная составляющая $\mathbf{E}_{\parallel}$ — это напряженность электростатического поля, создаваемого зарядом q на расстоянии $r = ct$ от него:

$$E_{\parallel} = \frac{q}{(ct)^2}. \qquad (2)$$

Поперечная составляющая $\mathbf{E}_{\perp}$ — это напряженность электрического поля в волне, излученной зарядом при ускоренном движении. Так как эта волна бежит по радиусу, то вектор $\mathbf{E}_{\perp}$ перпендикулярен направлению распространения волны. Из рис. 182 видно, что

$$\frac{E_{\perp}}{E_{\parallel}} = \frac{vt \sin\theta}{c\tau}. \qquad (3)$$

Подставляя сюда $E_{\parallel}$ из (2), находим

$$E_{\perp} = \frac{qv}{c^3 t\tau} \sin\theta.$$

Учитывая, что $ct = r$, а отношение v/τ есть ускорение a, с которым двигался заряд в течение промежутка времени от 0 до τ, перепишем это выражение в виде

$$E_{\perp} = \frac{qa}{c^2 r} \sin\theta. \qquad (4)$$

Прежде всего обратим внимание на то, что напряженность электрического поля волны $E_{\perp}$ убывает обратно пропорционально расстоянию r от центра, в отличие от напряженности электростатического поля $E_{\parallel}$, которая пропорциональна $1/r^2$. Такой зависимости от расстояния и следовало ожидать, если принять во внимание закон сохранения энергии. Так как при распространении волны в пустоте поглощения энергии не происходит, то количество энергии, прошедшее через сферу любого радиуса, одинаково. Поскольку площадь поверхности сферы пропорциональна квадрату ее радиуса, то поток энергии через единицу ее поверхности должен быть обратно пропорционален квадрату радиуса. Учитывая, что плотность энергии электрического поля волны равна $\frac{1}{8\pi} E_{\perp}^2$, приходим к выводу, что $E_{\perp} \sim 1/r$.

Далее отметим, что напряженность поля волны $E_{\perp}$ в формуле (4) в момент времени t зависит от ускорения заряда a в момент времени $t = 0$: волна, излученная в момент $t = 0$, достигает точки, находящейся на расстоянии r, спустя время, равное r/c.

Излучение осциллирующего заряда. Предположим теперь, что заряд q все время движется вдоль прямой с некоторым переменным ускорением $a(t)$ вблизи начала координат, например совершает гармонические колебания. Тогда он будет излучать электромагнитные волны непрерывно. Напряженность электрического поля волны в точке, находящейся на расстоянии r от начала координат, по-прежнему определяется формулой (4), причем поле $E_\perp$ в момент времени t зависит от ускорения заряда a в более ранний момент $t - r/c$:

$$E_\perp(t) = \frac{qa\,(t - r/c)}{c^2 r} \sin\theta. \tag{5}$$

Пусть движение заряда представляет собой гармоническое колебание вблизи начала координат с некоторой амплитудой A и частотой ω:

$$x(t) = A\cos\omega t. \tag{6}$$

Ускорение заряда $a(t)$ при таком движении дается выражением

$$a(t) = \ddot{x}(t) = -\omega^2 A\cos\omega t. \tag{7}$$

Подставляя ускорение заряда $a(t)$ в формулу (5), получаем

$$E_\perp(t) = -\frac{q\omega^2 A\cos\omega\,(t - r/c)}{c^2 r} \sin\theta. \tag{8}$$

Изменение электрического поля в любой точке при прохождении такой волны представляет собой гармоническое колебание с частотой ω, т. е. осциллирующий заряд излучает монохроматическую волну. Разумеется, формула (8) справедлива на расстояниях r, больших по сравнению с амплитудой колебаний заряда A.

Энергия электромагнитной волны. Плотность энергии электрического поля $w_э$ монохроматической волны, излучаемой зарядом, можно найти с помощью формулы (8):

$$w_э = \frac{1}{8\pi} E_\perp^2(t) = \frac{1}{8\pi} \frac{q^2\omega^4 A^2\cos^2\omega\,(t - r/c)}{c^4 r^2} \sin^2\theta. \tag{9}$$

Плотность энергии пропорциональна квадрату амплитуды колебаний заряда и четвертой степени частоты.

Любое колебание связано с периодическими переходами энергии из одного вида в другой и обратно. Например, колебания механического осциллятора сопровождаются взаимными превращениями кинетической энергии и потенциальной энергии упругой деформации. При изучении электромагнитных колебаний в контуре мы видели, что аналогом потенциальной энергии механического осциллятора является энергия электрического поля в конденсаторе, а аналогом кинетической энергии — энергия магнитного поля катушки. Эта аналогия справедлива не только для локализованных колебаний, но и для волновых процессов.

В монохроматической волне, бегущей в упругой среде, плотности кинетической и потенциальной энергий в каждой точке совершают гармоническое колебание с удвоенной частотой, причем так, что их значения совпадают в любой момент времени. Так же и в бегущей монохроматической электромагнитной волне: плотности энергии электрического и магнитного полей, совершая гармоническое колебание с частотой 2ω, равны друг другу в каждой точке в любой момент времени.

Плотность энергии магнитного поля $w_{\text{м}}$ выражается через индукцию B следующим образом:

$$w_{\text{м}} = \frac{1}{8\pi} B^2.$$

Приравнивая плотности энергии электрического и магнитного полей в бегущей электромагнитной волне, убеждаемся, что индукция магнитного поля в такой волне зависит от координат и времени точно так же, как напряженность электрического поля. Другими словами, в бегущей волне индукция магнитного поля $B_\perp$ и напряженность электрического поля $E_\perp$ равны друг другу в любой точке в любой момент времени (в гауссовой системе единиц):

$$B_\perp = E_\perp.$$

Поток энергии электромагнитной волны. Полная плотность энергии электромагнитного поля в бегущей волне w вдвое больше плотности энергии электрического поля (9). Плотность потока энергии j, переносимой волной, равна произведению плотности энергии w на скорость распространения волны c: $j = cw$. С помощью формулы (9) можно увидеть, что поток энергии через любую поверхность осциллирует с частотой 2ω. Для нахождения среднего значения плотности потока энергии $\langle j \rangle$ необходимо усреднить по времени выражение (9). Так как среднее значение $\cos^2 \omega(t - r/c)$ равно $1/2$, то для $\langle j \rangle$ получаем

$$\langle j \rangle = \frac{1}{8\pi} \frac{q^2 \omega^4 A^2}{c^3 r^2} \sin^2 \theta. \qquad (10)$$

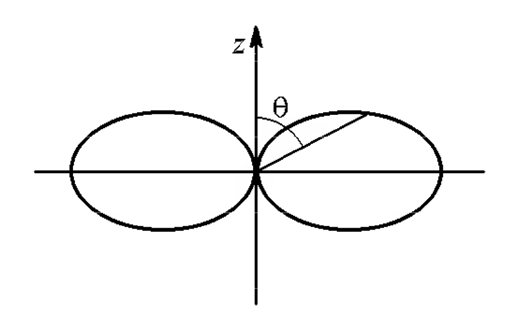


Рис. 183. Угловое распределение энергии, излучаемой осциллирующим зарядом

Плотность потока энергии в волне зависит от направления: в том направлении, по которому происходят колебания заряда, энергия вовсе не излучается ($\sin \theta = 0$). Наибольшее количество энергии излучается в плоскости, перпендикулярной этому направлению ($\sin \theta = 1$). Угловое распределение излучаемой осциллирующим зарядом энергии показано на рис. 183. Заряд совершает колебания вдоль оси z. Из начала координат проводятся отрезки, длина которых пропорциональна излучаемой в данном

направлении энергии, т. е. $\sin^2\theta$. На диаграмме показана линия, соединяющая концы этих отрезков.

Распределение энергии по направлениям в пространстве характеризуется поверхностью, которая получается вращением диаграммы вокруг оси z.

Поляризация электромагнитных волн. Волна, порождаемая вибратором при гармонических колебаниях, называется *монохроматической*. Монохроматическая волна характеризуется определенной частотой ω и длиной волны λ. Длина волны и частота связаны через скорость распространения волны c:

$$\lambda = cT = \frac{c}{\nu} = 2\pi\,\frac{c}{\omega}. \tag{11}$$

Электромагнитная волна в вакууме является *поперечной*: вектор напряженности электромагнитного поля волны, как это видно из приведенных выше рассуждений, перпендикулярен направлению распространения волны. Проведем через точку наблюдения P на рис. 184 сферу с центром в начале координат, около которого вдоль оси z совершает колебания излучающий заряд. Проведем на ней параллели и меридианы. Тогда вектор **E** поля волны будет направлен по касательной к меридиану, а вектор **B** перпендикулярен вектору **E** и направлен по касательной к параллели.

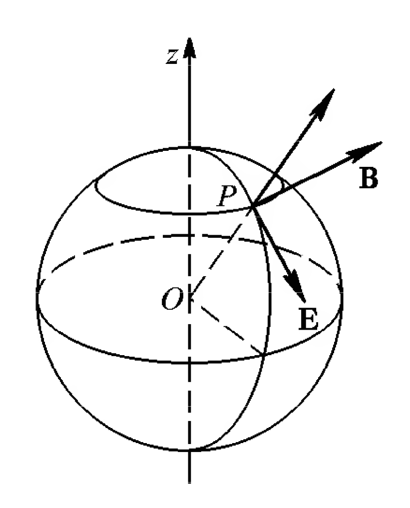


Рис. 184. Направление векторов **E** и **B** в волне, излучаемой осциллирующим вдоль оси z зарядом

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим подробнее взаимосвязь электрического и магнитного полей в бегущей волне. Эти поля после излучения волны уже не связаны с источником. При изменении электрического поля волны возникает магнитное поле, силовые линии которого, как мы видели при изучении тока смещения, перпендикулярны силовым линиям электрического поля. Это переменное магнитное поле, изменяясь, в свою очередь приводит к появлению вихревого электрического поля, которое перпендикулярно породившему его магнитному полю. Таким образом, при распространении волны электрическое и магнитное поля поддерживают друг друга, оставаясь все время взаимно перпендикулярными. Так как в бегущей волне изменение электрического и магнитного полей происходит в фазе друг с другом, то мгновенный «портрет» волны (векторы **E** и **B** в разных точках линии вдоль направления распространения) имеет вид, показанный на рис. 185. Такая волна называется *линейно поляризованной*. Совершающий гармоническое колебание заряд излучает по всем направлениям линейно поляризованные волны. В бегущей по любому направлению линейно поляризованной волне вектор **E** все время находится в одной плоскости.

Так как в линейном электромагнитном вибраторе заряды совершают именно такое осциллирующее движение, то излучаемая вибратором электромагнитная волна поляризована линейно. В этом легко убедиться на опыте, изменяя ориентацию приемного вибратора относительно излучающего. Сигнал имеет наибольшую величину, когда приемный вибратор параллелен излучающему (см. рис. 178). Если приемный вибратор повернуть перпендикулярно излучающему, то сигнал пропадает. Электрические колебания в приемном вибраторе могут появиться только благодаря составляющей электрического поля волны, направленной вдоль вибратора. Поэтому такой опыт свидетельствует о том, что электрическое поле в волне параллельно излучающему вибратору.

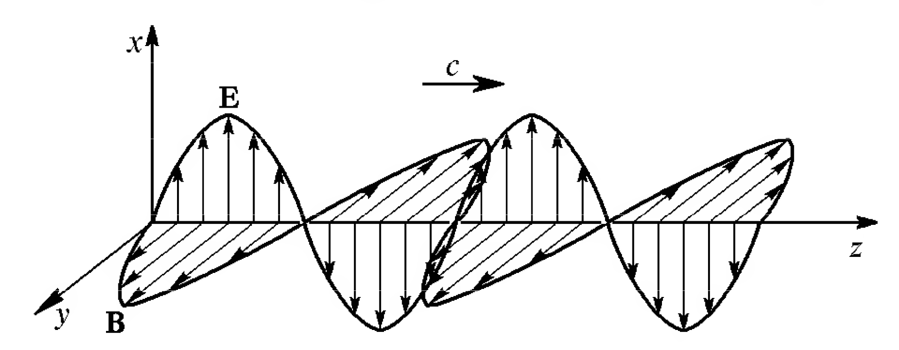


Рис. 185. Электрическое и магнитное поля в бегущей линейно поляризованной волне

Возможны и другие виды поляризации поперечных электромагнитных волн. Если, например, вектор **E** в некоторой точке при прохождении волны равномерно вращается вокруг направления распространения, оставаясь неизменным по модулю, то волна называется *циркулярно поляризованной* или *поляризованной по кругу*. Мгновенный «портрет» электрического поля такой электромагнитной волны показан на рис. 186.

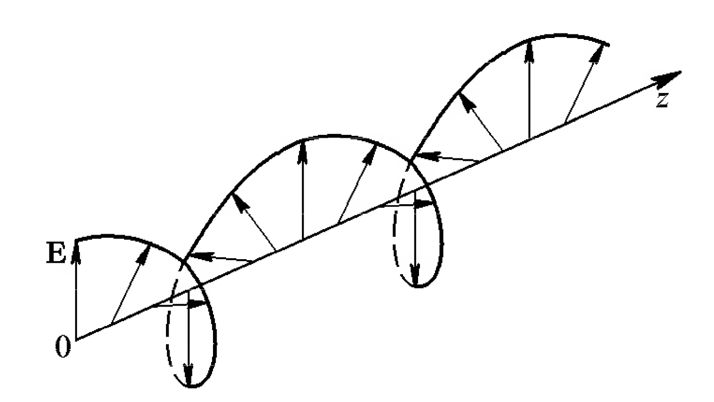


Рис. 186. Электрическое поле в бегущей циркулярно поляризованной волне

Волну круговой поляризации можно получить при сложении двух распространяющихся в одном направлении линейно поляризованных волн одинаковой частоты и амплитуды, векторы электрического поля в которых взаимно перпендикулярны. В каждой из волн вектор электрического поля в каждой точке совершает гармоническое колебание. Чтобы при сложении таких взаимно перпендикулярных колебаний получилось вращение результирующего вектора, необходим сдвиг фаз на $\pi/2$. Другими словами, складываемые линейно поляризованные волны должны быть сдвинуты на четверть длины волны одна относительно другой.

Импульс волны и давление света. Наряду с энергией электромагнитная волна обладает и импульсом. Если волна поглощается, то ее импульс передается тому объекту, который ее поглощает. Отсюда следует, что при поглощении электромагнитная волна оказывает давление на преграду. Объяснить происхождение давления волны и найти величину этого давления можно следующим образом.

Падающая волна взаимодействует с электрическими зарядами, входящими в состав любого тела. Сила, с которой электрическое и магнитное поля волны действуют на заряд q, равна

$$\mathbf{F} = q\mathbf{E} + \frac{q}{c}\,\mathbf{v}\times\mathbf{B}, \tag{12}$$

где $\mathbf{v}$ — скорость движения этого заряда. В бегущей электромагнитной волне в любой момент времени $B = E$; поэтому при $v \ll c$ второе слагаемое в (12) — сила Лоренца — всегда много меньше первого. Но именно с силой Лоренца связано давление, оказываемое волной, в то время как первое слагаемое, qE, определяет энергию, поглощаемую преградой.

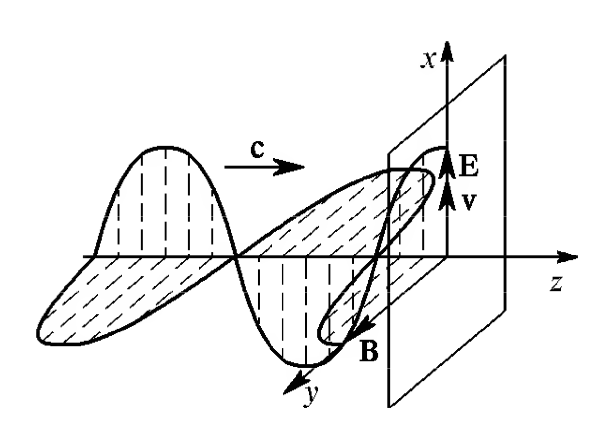


Рис. 187. Падение линейно поляризованной волны на поглощающую преграду

На рис. 187 показано падение линейно поляризованной волны на преграду: ось z выбрана по направлению распространения волны, ось x — вдоль направления колебаний вектора $\mathbf{E}$. Будем считать, что движение заряда в поглощающей волну преграде вызвано электрическим полем волны и поэтому векторы $\mathbf{E}$ и $\mathbf{v}$ направлены по одной прямой. Тогда поглощаемая зарядом мощность P равна

$$P = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v} = q\mathbf{E}\cdot\mathbf{v} = qE_x v_x. \tag{13}$$

Действующая на заряд сила Лоренца перпендикулярна векторам $\mathbf{v}$ и $\mathbf{B}$ и направлена по оси z:

$$F_z = qv_x B_y/c. \tag{14}$$

Так как $B_y(t) = E_x(t)$, то

$$F_z = qE_x v_x/c.$$

Сравнивая это выражение с выражением для поглощаемой мощности (13), находим

$$F_z = \frac{1}{c}\,P. \tag{15}$$

Видно, что действующая на заряд сила пропорциональна поглощаемой из волны мощности.

Так как взаимодействие волны с зарядом q в среднем приводит к поглощению энергии волны, то среднее за период значение погло-

щаемой мощности положительно. Поэтому и действующая на заряд средняя сила направлена в сторону распространения волны.

Будем считать, что вся энергия падающей волны поглощается преградой. Так как на единицу площади поверхности преграды в единицу времени волна приносит энергию $j = cw$, то оказываемое волной при нормальном падении давление p равно плотности энергии волны w: $p = w$. Сила давления поглощаемой электромагнитной волны сообщает преграде в единицу времени импульс, равный согласно формуле (15) поглощенной энергии, деленной на скорость света c. А это означает, что поглощенная электромагнитная волна обладала импульсом, который равен энергии, деленной на скорость света.

Впервые давление электромагнитных волн экспериментально было обнаружено П. Н. Лебедевым в 1900 г. в исключительно тонких опытах.

- Чем отличаются квазистационарные электромагнитные колебания в закрытом колебательном контуре от высокочастотных колебаний в открытом вибраторе? Приведите механическую аналогию.
- Поясните, почему при электромагнитных квазистационарных колебаниях в закрытом контуре не происходит излучение электромагнитных волн. Почему излучение происходит при электромагнитных колебаниях в открытом вибраторе?
- Опишите и объясните опыты Герца по возбуждению и обнаружению электромагнитных волн. Какую роль играет искровой промежуток в передающем и приемном вибраторах?
- Поясните, каким образом при ускоренном движении электрического заряда продольное электростатическое поле превращается в поперечное электрическое поле излучаемой им электромагнитной волны.
- Исходя из энергетических соображений, покажите, что напряженность электрического поля сферической волны, излучаемой вибратором, убывает как $1/r$ (в отличие от $1/r^2$ для электростатического поля).
- Что такое монохроматическая электромагнитная волна? Что такое длина волны? Как она связана с частотой? В чем заключается свойство поперечности электромагнитных волн?
- Что называется поляризацией электромагнитной волны? Какие виды поляризации вам известны?
- Какие доводы вы можете привести для обоснования того, что электромагнитная волна обладает импульсом?
- Объясните роль силы Лоренца в возникновении силы давления электромагнитной волны на преграду.

§ 29. Свойства и применения электромагнитных волн

В настоящее время для генерирования электромагнитных волн радиодиапазона обычно используют ламповые или транзисторные генераторы, которые позволяют получать незатухающие колебания

правильной синусоидальной формы в очень широких диапазонах частот. Генератор специальным кабелем связан с антенной-вибратором. Благодаря антенне волны излучаются в пространство.

Диапазоны радиоволн. В различных диапазонах частот (длин волн) используют антенны различных типов. Применяемые в радиовещании длинные (ДВ, $\lambda \approx 10^4-10^3$ м), средние (СВ, $\lambda \approx 10^3-10^2$ м) и короткие (КВ, $\lambda \approx 10^2-10$ м) волны излучаются антеннами в виде вертикального проводящего стержня. Для увеличения дальности приема антенну стремятся поднять как можно выше. Для телевидения, космической радиосвязи и радиолокации используются ультракороткие волны (УКВ), длина волны которых лежит в интервале от 10 до 10^{-3} м. В случае метровых волн применяют антенны в виде вибраторов в половину длины волны или целого ряда таких вибраторов, образующих антенну, которая создает направленное излучение. В дециметровом и сантиметровом диапазонах для получения направленного излучения используют параболические отражатели, подобные зеркалам оптических прожекторов.

Распространение радиоволн. Распространение радиоволн обусловлено целым рядом факторов, среди которых наибольшую роль играют состояние земной и водной поверхности и ионосфера — слой ионизированного газа на высоте 100—300 км над поверхностью Земли. Ионосфера прозрачна для волн короче примерно 10 м. Именно поэтому они и применяются в радиоастрономии и космической радиосвязи. Над Землей УКВ-радиоволны распространяются, подобно свету, прямолинейно в пределах прямой видимости. Волны КВ-диапазона отражаются ионосферой и могут распространяться на большие расстояния в результате многократных отражений от ионосферы и поверхности Земли. Длинные и средние волны благодаря дифракции способны огибать земную поверхность и обеспечивать устойчивую радиосвязь на значительных расстояниях.

Поле сферической волны. Характер электромагнитного поля волны, излучаемой простым вибратором, существенно зависит от того, на каком расстоянии r от него расположена рассматриваемая точка. Наибольший практический интерес представляет так называемая *волновая зона*, для которой $r \gg \lambda$. В свободном пространстве излучение распространяется по всем направлениям с одной и той же скоростью c. Поэтому время распространения до всех точек, удаленных на одинаковое расстояние от излучателя, одно и то же, и во всех точках сферы с центром в излучателе фазы колебаний одинаковы. Такая волна называется *сферической*, хотя ее электромагнитное поле сферической симметрией не обладает: на одном и том же расстоянии от излучателя напряженность максимальна для направлений, перпендикулярных к вибратору (т. е. в экваториальной плоскости), и уменьшается до нуля для направлений вдоль оси вибратора.

Так как напряженность электрического поля **E** в такой поперечной волне перпендикулярна направлению распространения волны, вектор **E** в любой точке перпендикулярен проведенному в нее радиусу-вектору (рис. 188*а*). При прохождении волны поле периодически изменяется со временем, и в точках, отстоящих одна от другой на $\lambda/2$ в радиальном направлении, векторы **E** в один момент времени направлены в противоположные стороны (рис. 188*б*). Соединяя на этом рисунке векторы **E**, получим одну из замкнутых линий напряженности вихревого электрического поля. Примерная картина линий напряженности электрического поля волны, излучаемой простым вибратором, показана на рис. 188*в*.

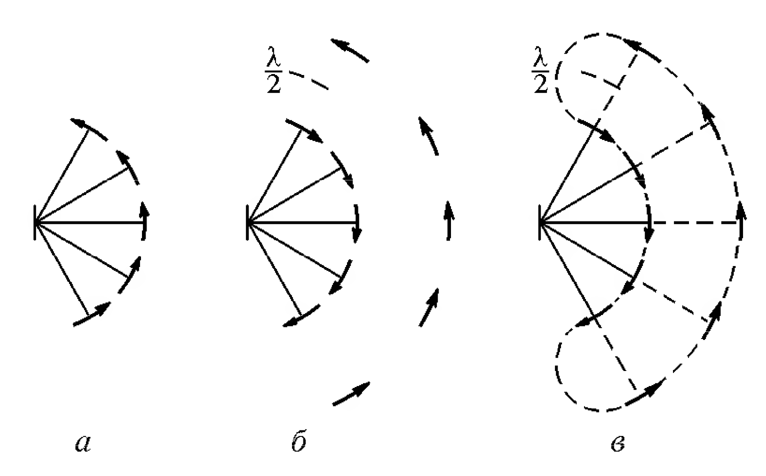


Рис. 188. Форма линий напряженности поля излучающего вибратора

Вектор **B** индукции магнитного поля в каждой точке перпендикулярен **E** и направлению распространения волны. Поэтому линии

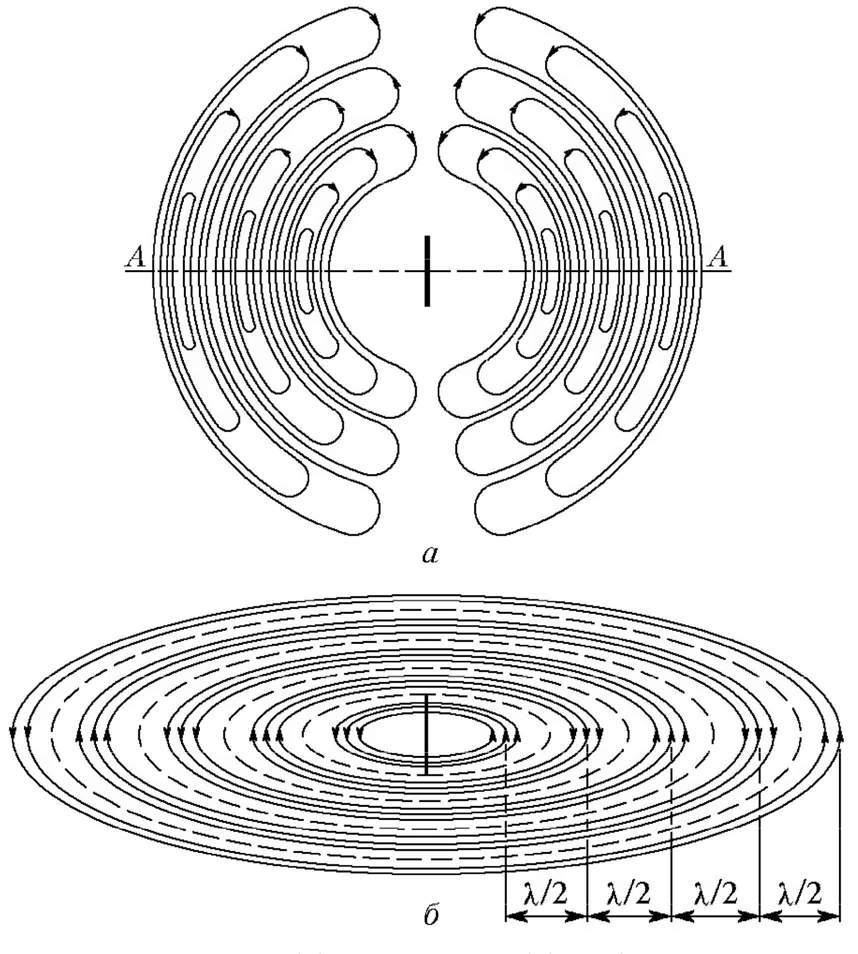


Рис. 189. Линии напряженности (*а*) и индукции (*б*) в сферической электромагнитной волне простого вибратора

индукции представляют собой концентрические окружности, лежащие в плоскостях, перпендикулярных вибратору (рис. 189*б*). Направление этих линий противоположно в точках, отстоящих одна от другой на $\lambda/2$ в радиальном направлении.

Принцип радиосвязи. Простейшая схема радиосвязи показана на рис. 190. На передающей станции *A* колебания в контуре, связанном с излучающей антенной, возбуждаются генератором. Антенна вместе с контуром образуют колебательную систему. Параметры соединенного с антенной контура подбираются так, чтобы собственная частота такой колебательной системы совпадала с частотой генератора.

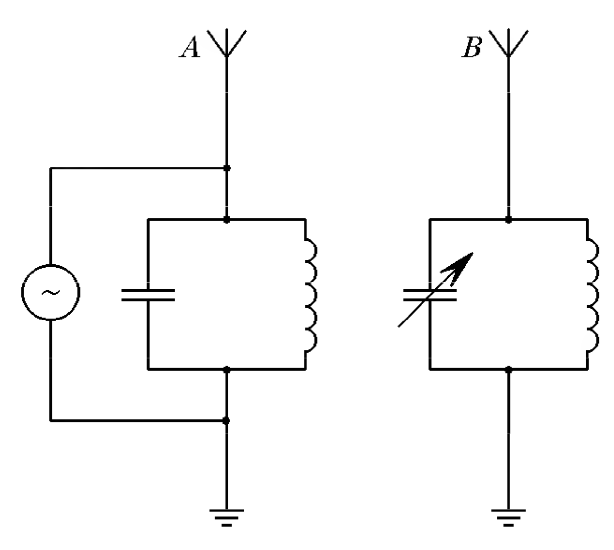


Рис. 190. Схема радиосвязи

В приемнике *B* соединенный с антенной колебательный контур служит для настройки, т. е. выделения из всех возбуждаемых в антенне колебаний только тех колебаний, которые происходят на частоте нужной нам передающей радиостанции.

Основной физический принцип радиосвязи заключается в том, что токи проводимости в цепях передатчика сначала превращаются в токи смещения, не требующие для своего распространения проводников, а затем эти токи смещения снова преобразуются в токи проводимости в цепях приемника.

Сама по себе схема на рис. 190 не может обеспечить передачу сигналов. Поясним это. На первый взгляд может показаться, что для передачи сигнала достаточно превратить его в электрические колебания и возбудить в антенне переменный ток с частотой и силой, соответствующими данному сигналу. Так, например, желая передать речь или музыку, можно с помощью микрофона получить соответствующий переменный ток и после надлежащего усиления послать его в антенну. Однако в действительности этим способом передать сигналы нельзя. Дело в том, что все сигналы, с которыми приходится иметь дело на практике, представляют собой колебания низкой частоты. Для речи и музыки эти частоты лежат в интервале от 10^2 до 10^4 Гц. Но для излучения радиоволн необходимы высокие частоты, так как только с быстрыми колебаниями можно получать достаточно сильные токи смещения. Направляя ток, соответствующий низкочастотному сигналу непосредственно в антенну, мы не получим практически никакой излученной мощности. Это отчетливо видно из формулы (10) предыдущего параграфа, согласно которой излучаемая мощность пропорциональна четвертой степени частоты.

Поэтому в радиотехнике для передачи энергии используют высокочастотные колебания, которые изменяют определенным образом колебаниями низкой частоты, содержащими информацию, подлежащую передаче. Такое изменение «несущих» высокочастотных колебаний называется *модуляцией*. На приемной стороне из этих сложных высокочастотных колебаний вновь выделяют колебания низкой частоты, которые после усиления направляют в громкоговоритель, телеграфный аппарат и т. п. Процесс восстановления низкочастотного сигнала называется *демодуляцией* или *детектированием*.

Амплитудная модуляция. Модуляцию высокочастотных колебаний можно производить, изменяя их амплитуду, частоту или фазу. На практике используются все три вида модуляции. Остановимся только на амплитудной модуляции, употребляемой наиболее часто. Во время паузы в радиопередаче немодулированные колебания тока в антенне имеют вид

$$I(t) = I_0 \cos \omega t. \qquad (1)$$

Они показаны на рис. 191*а*. При передаче речи или музыки эти колебания превращаются в более сложные:

$$I(t) = I_0 \, [1 + f(t)] \cos \omega t. \qquad (2)$$

Здесь $f(t)$ — модулирующая функция, выражающая передаваемую информацию, для которой $|f(t)| < 1$.

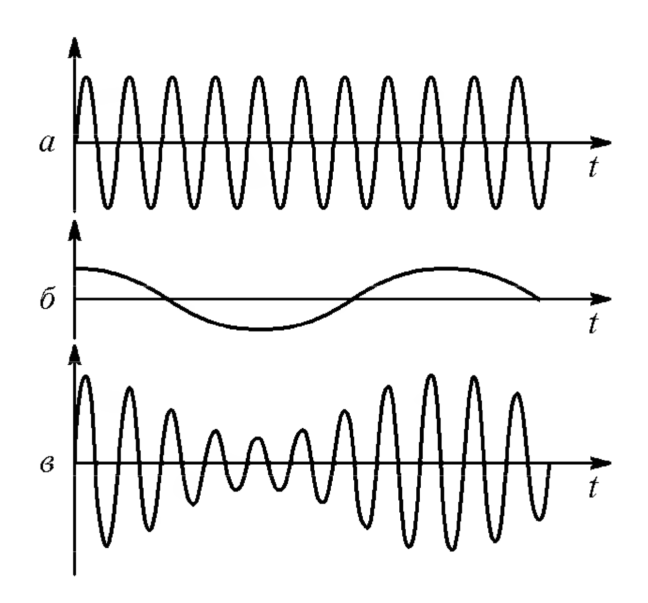


Рис. 191. Амплитудная модуляция колебаний

В простейшем случае передачи чистого музыкального тона, например звука камертона, ток через микрофон изменяется по гармоническому закону, и модулирующая функция записывается в виде

$$f(t) = m \cos \Omega t. \qquad (3)$$

Здесь m — так называемая глубина модуляции, причем $m < 1$ (рис. 191*б*). Частота звуковых колебаний Ω много меньше частоты ω несущих колебаний: $\Omega \ll \omega$. Колебания тока в антенне в этом случае описываются формулой

$$I(t) = I_0 \, [1 + m \cos \Omega t] \cos \omega t. \qquad (4)$$

График такого амплитудно-модулированного сигнала показан на рис. 191*в*.

Выражение (4), используя известное тригонометрическое тождество для произведения косинусов двух углов

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \, [\cos (\alpha + \beta) + \cos (\alpha - \beta)],$$

можно переписать в другом виде:

$$I(t) = I_0 \cos \omega t + \frac{1}{2} m I_0 \cos [(\omega - \Omega)t] + \frac{1}{2} m I_0 \cos [(\omega + \Omega)t]. \quad (5)$$

Частотный спектр модулированного сигнала. Таким образом, амплитудно-модулированное колебание (4) можно рассматривать либо как одно «гармоническое колебание частоты ω с медленно меняющейся амплитудой», либо как сумму трех настоящих гармонических колебаний на частотах ω, $\omega - \Omega$ и $\omega + \Omega$ с постоянными амплитудами. Основная частота передатчика ω называется в радиотехнике *несущей частотой*, а дополнительные частоты $\omega - \Omega$ и $\omega + \Omega$, возникающие при модуляции, — соответственно нижней и верхней *боковыми частотами*. Другими словами об этом говорят так: спектр модулированного сигнала (4) состоит из трех дискретных частот (рис. 192).

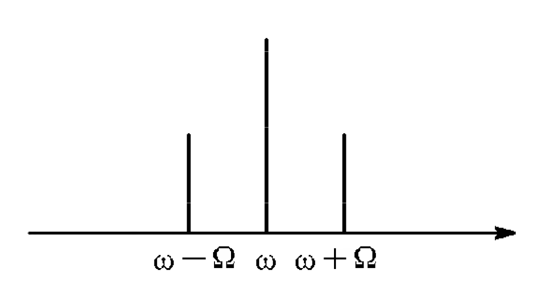


Рис. 192. Частотный спектр модулированного сигнала (4)

Если передаваемый низкочастотный сигнал представляет собой не одно гармоническое колебание, а имеет более сложную форму, то вместо одной определенной частоты модуляции Ω мы будем иметь много частот. В этом случае в спектре модулированного высокочастотного сигнала вместо двух боковых частот будет целая совокупность частот, лежащих слева и справа от несущей частоты ω и образующих так называемые *боковые полосы* частот.

Реальность боковых частот. Обратим внимание на следующее обстоятельство. Математически выражения (4) и (5) тождественны. Но ведь речь идет о математическом представлении физического процесса. Так что же такое амплитудно-модулированный сигнал на самом деле: существует ли реально три гармонических колебания с различными частотами ω, $\omega - \Omega$ и $\omega + \Omega$, которые можно зарегистрировать по отдельности приемниками, настроенными на эти частоты, или же реально есть только одно колебание с частотой ω, но происходящее с переменной амплитудой?

Оказывается, что такой вопрос не имеет физического смысла. Никакой приемник не в состоянии отличить, действует ли на него одна модулированная электромагнитная волна или три соответствующие ей немодулированные волны от трех передатчиков. Вопрос о реальности боковых частот — это такой же вопрос, как, например, что реально: то, что $10 = 2 + 8$ или то, что $10 = 5 + 5$? Правильно ставить вопрос можно только так: как целесообразно в данном конкретном случае представить число 10? А это зависит от того, что вы хотите сделать.

Назначение передатчика — излучить несущие информацию о сигнале колебания в пространство в виде электромагнитных волн. Поскольку, как мы видели, излучаться могут только высокочастот-

ные колебания, то естественным будет представление сигнала в антенне в виде (5): модулируя колебания, мы при помощи низкочастотного сигнала превращаем одно-единственное гармоническое колебание передатчика в несколько гармонических колебаний, которые, однако, все являются высокочастотными и поэтому пригодны для излучения радиоволн.

Детектирование. Чтобы при демодуляции в приемнике получить опять низкочастотный сигнал неискаженной формы, необходимо, очевидно, чтобы в приемник попали колебания всех частот, возникших при модуляции. А для этого нужно, чтобы настройка приемника хотя и была очень острой (для отсечения сигналов от других «мешающих» радиостанций), но все же такой, чтобы ширина резонансной кривой приемника, т. е. ширина *полосы пропускания*, охватывала все боковые частоты спектра модулированного сигнала.

В приемнике из высокочастотных колебаний снова формируются колебания низкой частоты, соответствующие передаваемому сигналу. Детектирование осуществляется выпрямлением модулированных колебаний при прохождении тока через какое-либо нелинейное устройство — диод, электронную лампу, и последующим сглаживанием высокочастотных пульсаций выпрямленного тока цепью,

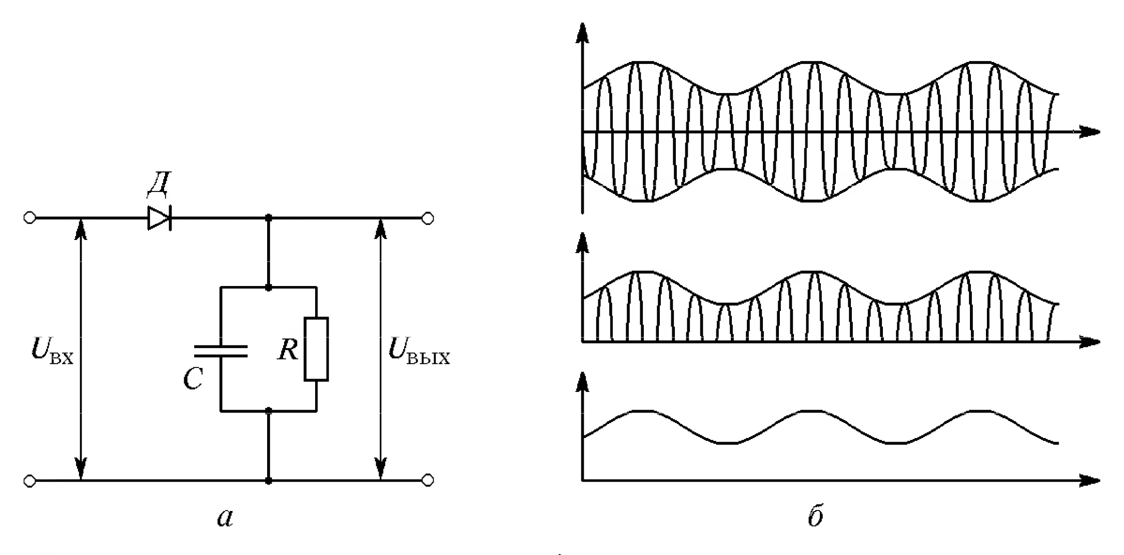


Рис. 193. Схема демодулятора (*а*) и преобразование сигнала при детектировании (*б*)

обладающей подходящей постоянной времени (рис. 193*а*). Последовательные этапы преобразования колебаний при детектировании показаны на рис. 193*б*. Выпрямление происходит благодаря односторонней проводимости диода *Д*, а сглаживание пульсаций — *RC*-фильтром: в те моменты, когда диод пропускает ток, конденсатор фильтра заряжается, уменьшая ток через нагрузку (громкоговоритель, телефон), зато в промежутках между проходящими импульсами, когда диод заперт, конденсатор частично разряжается через нагрузку, поддерживая уровень тока в нагрузке.

Радиосвязь. Схема простейшего радиоприемника получается объединением входной цепи с колебательным контуром (рис. 190), настраиваемым на частоту передающей станции, и демодулятора (рис. 193*а*), к выходу которого подключается телефон. В реальных приемниках колебания высокой частоты перед детектированием усиливаются. Продетектированные колебания также усиливаются широкополосным усилителем низкой частоты. Впервые практическое применение радиоволн для целей связи было осуществлено А.С. Поповым и Г. Маркони. В дальнейшем бурное развитие радиотехники оказало сильное влияние на технический прогресс и радикально изменило весь облик современной цивилизации.

- Чем различаются электромагнитные волны разных радиодиапазонов? Какими свойствами обусловлены особенности их применения в радиосвязи?
- Опишите структуру электромагнитного поля излучаемой простым вибратором сферической волны в волновой области. Почему это поле не может быть сферически-симметричным?
- Поясните роль токов смещения в физическом принципе радиосвязи.
- Что такое модуляция? С какой целью она используется? Почему она принципиально необходима для передачи информации с помощью радиоволн?
- Что такое частотный спектр модулированных высокочастотных колебаний? Какой вид он имеет?
- Что реально представляет собой модулированный сигнал: одно высокочастотное колебание с медленно меняющейся амплитудой или несколько гармонических колебаний разных частот с постоянными амплитудами?
- Почему приемник должен воспринимать кроме несущей частоты еще обязательно и боковые полосы частот?
- С какой целью в приемнике необходимо детектирование? Объясните принцип действия простейшей схемы демодулятора.
- Нарисуйте схему простейшего радиоприемника и объясните, как он работает.

△ **Полоса пропускания и избирательность.** Обсудим несколько подробнее вопрос о ширине полосы пропускания приемника и ее связи с его избирательностью. Все работающие радиостанции одновременно вызывают электромагнитные колебания в антенне радиоприемника. Если бы эти радиостанции излучали идеальные монохроматические волны, то какими бы большими ни были колебания от мешающих станций, всегда можно было бы выделить нужное колебание, сделав полосу пропускания достаточно узкой выбором контура с высокой добротностью. Однако чисто синусоидальное колебание — это еще не сигнал. Оно не несет никакой информации, кроме разве что информации о том, что передатчик включен.

Несущий информацию сигнал — это, как мы видели, обязательно модулированное колебание, частотный спектр которого

кроме основной частоты содержит также боковые полосы частот. Для воспроизведения передаваемой информации без искажений нужно, чтобы полоса пропускания приемника охватывала весь частотный спектр модулированного сигнала.

Итак, для правильного воспроизведения сигнала требуется расширять полосу пропускания приемника, а для отстраивания от мешающих радиостанций, т. е. для увеличения избирательности, — сужать эту полосу.

В результате для нормальной работы нескольких радиостанций их несущие частоты должны отстоять одна от другой на величину, превышающую ширину боковых полос спектра излучаемых ими модулированных колебаний. Но при этом в эфире становится тесно: число одновременно работающих в радиодиапазоне передающих станций ограничено. Поэтому приходится идти на компромисс: международное соглашение ограничивает максимальную частоту модуляции величиной 10 кГц, что позволяет без заметных искажений передавать речь и музыку.

Для высококачественного радиовещания и тем более для телевидения, где объем передаваемой информации значительно больше, необходима более широкая полоса частот, которую можно обеспечить только в УКВ-диапазоне. Здесь допустимо взаимное перекрывание полос удаленных передающих станций, поскольку радиоволны УКВ-диапазона распространяются только в пределах прямой видимости.

Различные представления модулированного колебания. Для понимания всех этих вопросов очень важно отдавать себе отчет в том, на каком языке следует описывать модулированное высокочастотное колебание в каждом конкретном случае: когда о нем можно говорить как о «гармоническом колебании с медленно меняющейся амплитудой», а когда нужно представлять его как совокупность нескольких чисто гармонических колебаний с разными частотами. Например, для широкополосного приемника целесообразно использовать представление о колебании одной частоты с изменяющейся амплитудой. Действительно, когда ширина полосы пропускания $\Delta\omega$ много больше частоты модуляции Ω, колебательный контур приемника примерно одинаково откликается на синусоидальные колебания с частотами ω и $\omega \pm \Omega$. Это значит, что приемник воспринимает модулированное колебание как обычное синусоидальное.

Для приемника с высокой избирательностью, ширина полосы которого существенно меньше частоты модуляции, необходимо использовать представление о нескольких чисто гармонических колебаниях, так как при перестройке его резонансной частоты ω_0 мы получаем чисто синусоидальный отклик при совпадении ω_0 с каждой из частот ω, $\omega + \Omega$ спектра модулированного сигнала.

Пример из акустики. Описываемые положения очень легко проиллюстрировать на опыте, используя акустические колебания. Возьмем два одинаковых камертона A и B, имеющих одну и ту же частоту собственных колебаний. Наденем на ножку одного из них (B) резиновое кольцо. Теперь камертоны «расстроены» — их частоты ω_A и ω_B немного различаются. Возбудим оба камертона одновременно. Когда разность их частот $\Omega = \omega_A - \omega_B$ много меньше средней частоты $\omega = (\omega_A + \omega_B)/2$, мы воспринимаем одновременное звучание камертонов как один звук переменной громкости. Для нашего уха ситуация такая же, как если бы звучал один камертон, резонансный ящик которого периодически открывали и закрывали с частотой $\Omega = \omega_A - \omega_B$. Наше ухо — это широкополосный приемник звуковых колебаний, и действие двух близких по частоте колебаний воспринимает как одно модулированное колебание.

Совсем иное дело, если в качестве приемника используется узкополосный высокодобротный резонатор, например еще один точно такой же камертон C. Возбудим сначала только один камертон A, и через некоторое время заглушим его, притронувшись рукой к ножкам. В наступившей тишине отчетливо слышен звук, издаваемый камертоном C — он откликнулся на колебания камертона A. Повторим опыт, возбуждая только «расстроенный» камертон B. Теперь C «молчит», не откликается на колебания B. При одновременном возбуждении двух камертонов A и B, когда мы слышим звук переменной громкости, реакция камертона C будет точно такой же, как и при возбуждении только одного камертона A. Его вынужденные колебания происходят с постоянной амплитудой. Он как бы не замечает, что звук имеет переменную громкость. Ясно, что в данном случае целесообразно представление модулированного колебания в виде суммы двух чисто гармонических колебаний с частотами ω_A и ω_B и постоянными амплитудами. ▲

- Почему требования, предъявляемые к полосе пропускания приемника для правильного воспроизведения передаваемого сигнала и для возможности отстраиваться от мешающих радиостанций, оказываются противоречивыми?
- Почему для одновременной работы различных радиостанций место в эфире оказывается ограниченным?
- Поясните, в каких случаях модулированное колебание целесообразно представлять как колебание на единственной частоте с медленно меняющейся амплитудой, а в каких — как совокупность чисто гармонических колебаний с несколькими частотами.
- Проделайте описанные опыты с камертонами и объясните их. Попробуйте воспроизвести эти опыты, используя вместо камертонов какие-либо струнные музыкальные инструменты, например, гитары.

VI. ОПТИКА

§ 30. Свет как электромагнитные волны. Интерференция

Оптика — это учение о физических явлениях, связанных с распространением коротких электромагнитных волн, длина которых составляет приблизительно $10^{-5} \div 10^{-7}$ м. Значение именно этой области спектра электромагнитных волн связано с тем, что внутри нее в узком интервале длин волн от 0,40 до 0,76 мкм лежит участок *видимого света*, непосредственно воспринимаемого человеческим глазом. Этот участок составляет лишь малую часть всей шкалы электромагнитных волн.

Видимый свет и оптический диапазон. С точки зрения физики происходящих процессов выделение столь узкой области видимого света не имеет особого смысла, поэтому в понятие «оптический диапазон» включают обычно еще и *инфракрасное* и *ультрафиолетовое излучение*. Но и для них принятые границы спектра достаточно условны. По существу, эти границы определяются используемыми способами получения и регистрации электромагнитных волн.

Излучение электромагнитных волн происходит при ускоренном движении электрических зарядов. Электромагнитные волны радиодиапазона излучаются антеннами радиопередатчиков при вынужденных колебаниях электронов в антеннах. Все электроны в антенне совершают колебания в одинаковой фазе. Поскольку эти колебания могут поддерживаться очень долго и с высоким постоянством частоты, то излучаемые при этом радиоволны с огромной степенью точности можно считать монохроматическими.

Когерентные и некогерентные волны. В оптике все иначе. Любой источник света — это скопление множества возбужденных или непрерывно возбуждаемых атомов. Генератор световой волны — это каждый отдельный атом вещества. Возбужденный атом излучает цуг волн, т. е. отрезок почти монохроматических волн конечной протяженности. Характерной особенностью каждого элементарного источника является его самостоятельность, независимость от других атомов. Поэтому даже в том случае, когда отдельные цуги можно характеризовать одной и той же длиной волны λ, соотношения фаз между цугами волн, излученных раз-

ными атомами, имеют совершенно случайный характер и меняются от цуга к цугу.

Только в лазере, где используется вынужденное излучение, удается заставить все возбужденные атомы излучать электромагнитные волны согласованно, подобно тому, как это происходит в антенне радиопередатчика. В результате образуется световая волна, близкая по своим свойствам к идеальной монохроматической, — *когерентная* электромагнитная волна.

Излучение обычных источников света, таких, как раскаленные твердые и жидкие тела, возбужденные электрическим разрядом газы и т. д., представляет собой наложение огромного числа не согласованных между собой цугов волн, т. е. фактически «световой шум» — беспорядочные, как говорят, *некогерентные* колебания электромагнитного поля.

Интерференция света. Прямым подтверждением волновой природы света может служить *интерференция* — явление наложения нескольких волн, при котором в одних местах происходит усиление, а в других ослабление амплитуды результирующей волны.

Наблюдать интерференцию света от некогерентных источников можно, только используя специальные приемы — разделяя исходный пучок на два. Хотя в каждом из этих пучков, как и в исходном, фазовые соотношения между различными цугами непрерывно хаотически меняются, эти изменения будут одинаковыми для обоих пучков. Если эти пучки снова свести вместе, то можно наблюдать устойчивую интерференционную картину при условии, что разность хода между пучками не превышает длины отдельного цуга. Если же разность хода окажется больше длины цуга, то устойчивой интерференционной картины не будет, так как в этом случае будет происходить наложение цугов, излученных разными атомами.

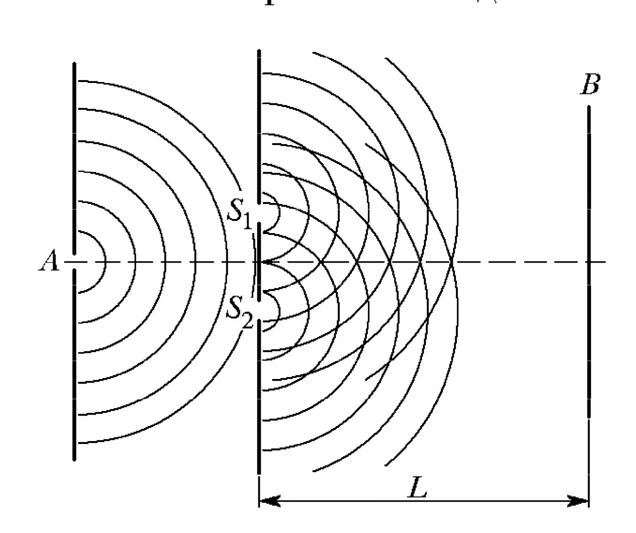


Рис. 194. Схема опыта Юнга

Явление интерференции света впервые было объяснено на основе волновых представлений Т. Юнгом в 1802 г. Для интерпретации *опыта Юнга* можно воспользоваться принципом Гюйгенса, который справедлив не только для механических волн, но и для волновых процессов любой природы. В опыте Юнга малое отверстие A в непрозрачном экране (рис. 194) освещалось интенсивным источником света. На основании принципа Гюйгенса это отверстие можно считать новым точечным источником полусферических волн. Эти волны падают на два малых отверстия S_1 и S_2 в следующем эк-

ране, которые в свою очередь становятся новыми точечными источниками волн.

Таким способом в опыте Юнга достигается разделение исходной волны на две. Эти волны налагаются друг на друга в области за отверстиями и могут интерферировать, так как источники S_1 и S_2 когерентны. На экране B образуется интерференционная картина.

Разделение волн от первичного некогерентного источника на две когерентные волны, т. е. получение двух вторичных когерентных точечных источников, может осуществляться разными способами. Но расчет интерференционной картины во всех таких случаях производится одинаково, так же, как и в схеме Юнга. Если в излучении первичного источника все независимые цуги волн характеризуются одной и той же длиной волны λ, то для изучения вторичных источников S_1 и S_2 можно использовать монохроматическую идеализацию, несмотря на то, что их излучение представляет собой ту же хаотическую последовательность отдельных цугов.

Замена такой последовательности цугов бесконечной синусоидальной волной возможна при условии, что точечные вторичные источники когерентны, а разность хода излучаемых ими волн в любой точке экрана B меньше протяженности отдельного цуга. Для этого, разумеется, экран B должен быть удален от источников S_1 и S_2 на значительное расстояние L, а расстояние d между источниками S_1 и S_2 должно быть достаточно мало.

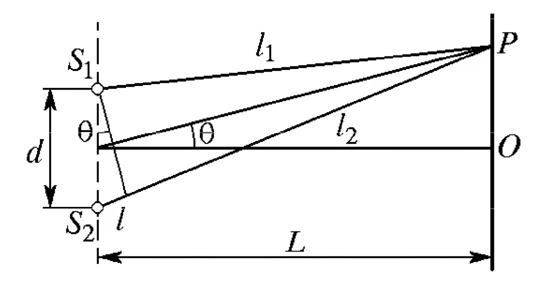


Рис. 195. К расчету интерференционной картины в опыте Юнга

Схема Юнга. Схема расчета интерференционной картины ясна из рис. 195. В точке O, расстояния до которой от источников S_1 и S_2 одинаковы, приходящие волны усиливают друг друга, так как колебания поля в этой точке происходят в одинаковой фазе. Результат сложения колебаний в произвольной точке P определяется разностью хода l волн, приходящих в P из S_1 и S_2. Если l равно целому числу длин волн λ, то колебания в точке P усиливают друг друга; если l равно нечетному числу полуволн, то колебания взаимно ослабляются.

Выразим разность хода l волн, приходящих в точку наблюдения P, через угол θ между осью и направлением на точку P и расстояние d между источниками (рис. 195).

Будем считать, что $d \ll L$. Тогда при малых θ разность хода можно найти, опуская из S_1 перпендикуляр на прямую S_2P:

$$l = d\,\theta. \qquad (1)$$

Формула (1) дает возможность определить угловое положение максимумов и минимумов на экране B (рис. 195). Направления на

максимумы получим, полагая в (1) $l = n\lambda$:

$$\theta_{max} = n\,\frac{\lambda}{d}, \quad n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots \qquad (2)$$

Полагая $l = (2n + 1)\,\lambda/2$, получим направления на минимумы:

$$\theta_{min} = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{d}, \quad n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, \ldots \qquad (3)$$

Угловое расстояние $\Delta\theta$ между соседними максимумами или минимумами, как видно из этих формул, равно λ/d, а расстояние h между ними на экране B, как видно из рис. 195, равно

$$h = L\,\Delta\theta = \lambda L/d. \qquad (4)$$

Интерференционные полосы. Мы рассмотрели только точки экрана B, лежащие в плоскости чертежа на рис. 195. Легко сообразить, что вся интерференционная картина на экране B в непосредственной близости от точки O состоит из чередующихся светлых и темных полос, называемых *интерференционными полосами.* Они находятся на равных расстояниях друг от друга и направлены перпендикулярно плоскости чертежа, т. е. плоскости, в которой лежат первичный точечный источник S (т. е. отверстие A на рис. 194) и вторичные источники S_1 и S_2.

Трудность наблюдения интерференции света в таких опытах связана с тем, что длина волны света очень мала. При $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ см и расстоянии d между источниками, равном всего 0,5 мм, расстояние между соседними интерференционными полосами будет составлять только 1 мм при удалении экрана B на 1 м от источников.

Освещенность экрана, т. е. вызываемое светом зрительное ощущение, определяется энергией колебаний в световой волне, т. е. квадратом ее амплитуды. Рассчитаем распределение освещенности на экране, где наблюдается интерференционная картина. Если при освещении экрана несколькими некогерентными источниками складываются освещенности, то при интерференции складываются напряженности полей в когерентных волнах, а освещенность в каждой точке экрана пропорциональна квадрату амплитуды результирующего колебания. Поскольку расстояния от источников до точки наблюдения почти одинаковы, то амплитуды обеих волн в точке наблюдения практически равны, если вторичные источники S_1 и S_2 одинаковы. При этом напряженность поля в точке наблюдения пропорциональна выражению, которое представляет собой сумму колебаний, вызываемых каждой из волн в точке P:

$$\cos\omega(t - l_1/c) + \cos\omega(t + l_2/c) = \\ = 2\cos\left[\omega\,(l_2 - l_1)/2c\right]\cos\omega\left[t - (l_1 + l_2)/2c\right].$$

Видно, что это есть уравнение колебаний с амплитудой $2\cos(\omega l/2c)$, зависящей от разности хода $l = l_2 - l_1$. Так как осве-

щенность пропорциональна квадрату амплитуды, то распределение освещенности $E(\theta)$ в зависимости от направления на точку наблюдения θ имеет вид

$$E(\theta) \sim 4\cos^2\frac{\omega l}{2c} = 4\cos^2\left(\frac{\omega d}{2c}\,\theta\right) = 2\left[1 + \cos\left(\frac{\omega d}{c}\,\theta\right)\right]. \qquad (5)$$

Распределение освещенности в интерференционных полосах, наблюдаемых по схеме Юнга, показано на рис. 196. Освещенность в минимумах равна нулю, а в максимумах она в четыре раза больше освещенности, которая создавалась бы одним источником. Положение максимумов и минимумов, как видно из формулы (5), находится в соответствии с полученными ранее формулами (2) и (3).

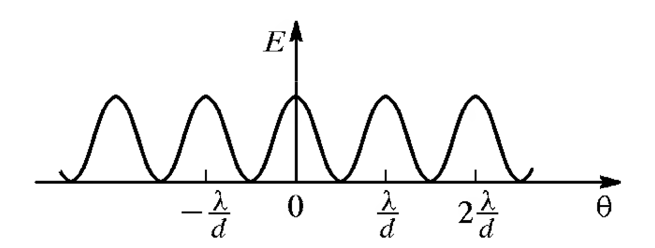


Рис. 196. Распределение освещенности в интерференционных полосах, наблюдаемых по схеме Юнга

Отметим, что среднее значение освещенности по экрану в интерференционной картине, согласно формуле (5), равно просто удвоенной освещенности от одного источника. Это значит, что при интерференции происходит только перераспределение энергии в пространстве.

Интенсивность наблюдаемой в опыте Юнга интерференционной картины можно заметно увеличить, если вместо точечных отверстий A, S_1 и S_2 в экранах использовать узкие, длинные, параллельные между собой щели. Вид полос вблизи центра интерференционного поля будет при этом таким же, как и при использовании точечных отверстий. Поясним это. Если точечное отверстие A перемещать перпендикулярно плоскости чертежа на рис. 194, то интерференционные полосы на экране, получаемые от точечных отверстий S_1 и S_2, просто будут смещаться вдоль своих направлений, т. е. также перпендикулярно плоскости чертежа. Поэтому замена отверстия A длинной щелью, т. е. непрерывной цепочкой точечных некогерентных источников, не приведет к ухудшению четкости интерференционных полос по крайней мере в той области, где их кривизна незначительна. Не приведет к ухудшению четкости и перемещение по этому направлению отверстий S_1 и S_2. Поэтому их также можно заменить на узкие длинные щели.

Зеркала Френеля. В качестве другого примера интерференционного опыта, который может быть рассчитан по схеме Юнга, рассмотрим метод наблюдения интерференции света с помощью зеркал Френеля. Вторичными когерентными источниками S_1 и S_2 здесь являются изображения реального источника света S в плоских зеркалах, расположенных под малым углом α друг к другу (рис. 197). Экран защищен от попадания прямых лучей от источника S.

Выясним прежде всего, в каких точках экрана будет наблюдаться интерференционная картина. Будет ли она занимать весь экран или какую-то его часть? Интерференция света наблюдается только там, где происходит наложение волн, пришедших от когерентных источников. В данном опыте нужно определить ту область экрана, в любую точку которой свет приходит после отражения от каждого из

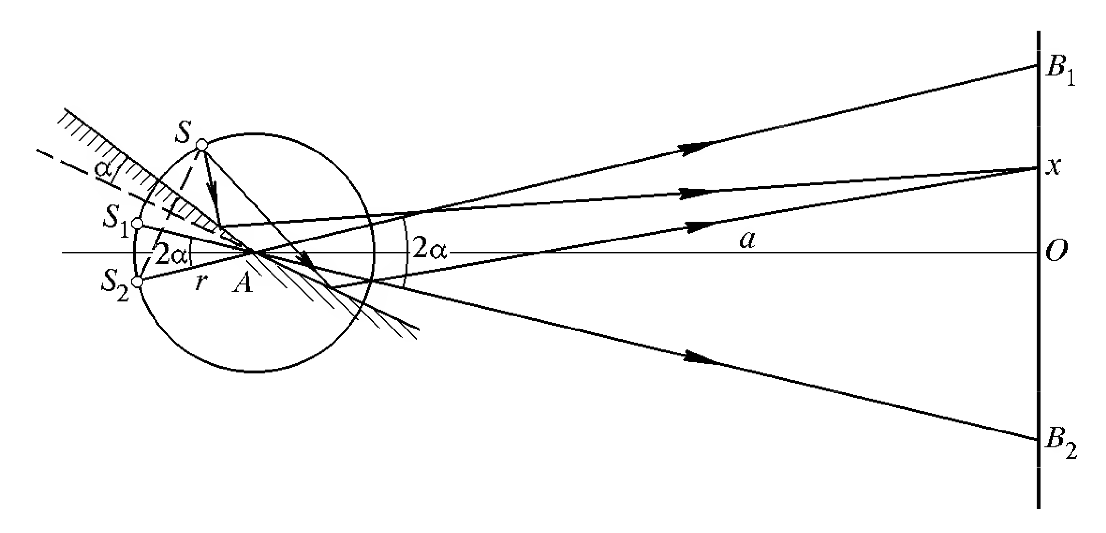


Рис. 197. Изображения реального источника света в плоских зеркалах, расположенных под малым углом друг к другу

зеркал. На рис. 197 построены изображения S_1 и S_2 точечного источника S в обоих зеркалах. Нетрудно убедиться, что центр окружности, на которой лежат точки S, S_1 и S_2, находится в точке A — вершине угла, образованного зеркалами. Из рисунка видно, что интерференционное поле на экране ограничено точками B_1 и B_2. Например, B_2 является крайней нижней точкой, в которую еще приходит свет после отражения от верхнего зеркала. Ее можно найти, если провести прямую через изображение источника S_1 в верхнем зеркале и точку A. Аналогично находится точка B_1.

Из рис. 197 видно, что для расчета интерференционной картины действительно можно воспользоваться схемой Юнга и всеми полученными выше для нее формулами. Так как область интерференции на экране ограничена точками B_1 и B_2, то легко подсчитать число интерференционных полос. Если экран расположен так, как показано на рисунке, т. е. параллельно линии S_1S_2, соединяющей изображения источника в зеркалах, то $B_1B_2 = 2a \cdot \operatorname{tg}\alpha$, где a — расстояние от линии пересечения зеркал до экрана. Учитывая малость угла α между зеркалами, можно приближенно написать $B_1B_2 \approx 2a\alpha$. Расстояние h между двумя соседними полосами дается формулой (4). Расстояние d между источниками S_1 и S_2, как видно из рис. 197, равно $2r\alpha$. Расстояние до экрана L равно $r + a$. Поэтому, согласно (4),

$$h = \frac{\lambda\,(r+a)}{2r\,\alpha}.$$

Полное число полос интерференции N, умещающихся на интерференционном поле, равно

$$N = \frac{B_1B_2}{h} = \frac{4\,\alpha^2 ar}{\lambda\,(a+r)}.$$

Так как интерференционную картину удобно наблюдать при условии $r \ll a$, то $N \approx 4\alpha^2 r/\lambda$. Отметим, что в опыте с зеркалами Френеля, в отличие от опыта Юнга, можно наблюдать лишь небольшое число интерференционных полос, так как когерентные волны налагаются лишь в ограниченной части экрана.

Интерференционные явления, исторически послужившие экспериментальным доказательством волновой природы света, и в наши дни находят важные практические применения, в частности в спектроскопии и в метрологии. Элементарная теория, основанная на использовании монохроматической идеализации для световых волн, вполне пригодна для описания действия приборов, применяемых в большинстве интерференционных исследований. При этом можно считать, что поведение отдельных пучков интерферирующих лучей подчиняется законам геометрической оптики, и полностью пренебрегать дифракционными явлениями.

Интерферометр Майкельсона. В рассмотренных выше интерференционных опытах интерферируют волны с малой разностью хода — порядка нескольких длин волн. Но существуют и такие интерференционные приборы, в которых разность хода может быть сделана весьма большой. Эти приборы называются *интерферометрами*.

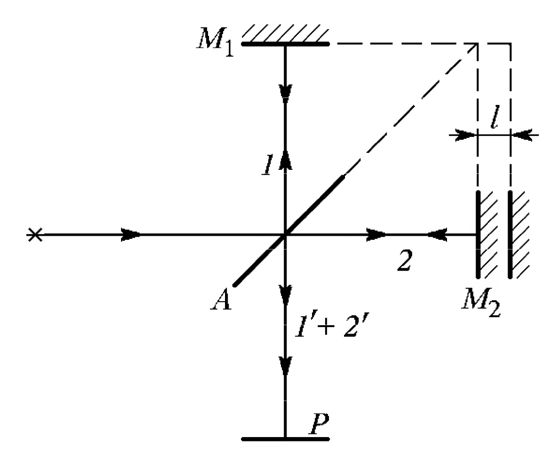


Рис. 198. Схема интерферометра Майкельсона

На рис. 198 приведена упрощенная схема интерферометра Майкельсона. Свет от некоторого источника падает слева на полупрозрачное зеркало A и разделяется на два пучка: отраженный *1* и прошедший *2*. После отражения от зеркал M_1 и M_2 эти пучки снова падают на полупрозрачное зеркало A и частично отражаются, а частично проходят через него. В результате на экране P можно наблюдать интерференцию лучей *1'* и *2'*.

Картина интерференции зависит от разности хода лучей, которая определяется разностью «плеч» интерферометра. Одно из зеркал (M_2 на рис. 198) может перемещаться с помощью микрометрического винта, оставаясь параллельным самому себе. При его перемещении изменяется разность хода и интерференционные полосы на экране P смещаются. Смещение интерференционной картины на одну полосу происходит при перемещении зеркала M_2 на расстояние, равное половине длины волны.

Интерферометр Майкельсона используется для выполнения особенно точных измерений длины. Например, в метрологии с его помощью производится сравнение оптического эталона длины, т. е. длины волны оранжевой линии криптона-86, со вторичными эталонами, выполненными в виде твердых стержней.

- Чем отличаются электромагнитные волны, излучаемые антенной радиопередатчика, и световые волны, излучаемые раскаленным телом?
- Что такое когерентные и некогерентные электромагнитные волны? Приведите примеры.
- В максимумах интерференционной картины от двух источников освещенность может вчетверо превышать освещенность, создаваемую одним источником. Нет ли здесь нарушения закона сохранения энергии?
- Объясните, почему в опыте Юнга четкость интерференционных полос не ухудшается, если заменить точечные отверстия длинными узкими параллельными щелями.
- Как зависит ширина интерференционных полос в опыте Юнга от расстояния между щелями и от расстояния до экрана?
- Поясните ход лучей в интерферометре Майкельсона и объясните, каким образом в нем можно изменять разность хода интерферирующих волн.
- Объясните, почему в интерферометре Майкельсона интерференционная картина смещается на одну полосу при перемещении одного из зеркал на расстояние, равное половине длины волны.
- Каким образом интерферометр Майкельсона используют для точных измерений длины?

§ 31. Дифракция света

Наряду с интерференцией другим примером общего для всех волновых процессов явления может служить *дифракция* — огибание волнами препятствий. Для световых волн дифракция проявляется в отклонении от прямолинейного распространения и загибании света в область геометрической тени.

Характерной особенностью дифракционных явлений в оптике оказывается то, что здесь, как правило, длина волны света почти всегда много меньше размеров преград на пути световых волн. Поэтому наблюдать дифракцию света можно только на достаточно больших расстояниях от преграды. Проявление дифракции состоит в том, что распределение освещенности отличается от простой картины, предсказываемой геометрической оптикой на основе прямолинейного распространения света.

Принцип Гюйгенса—Френеля. Строгий расчет дифракционной картины представляет собой очень сложную математическую задачу. Но в некоторых практически важных случаях достаточно хоро-

шее приближение дает упрощенный подход, основанный на использовании *принципа Гюйгенса—Френеля.*

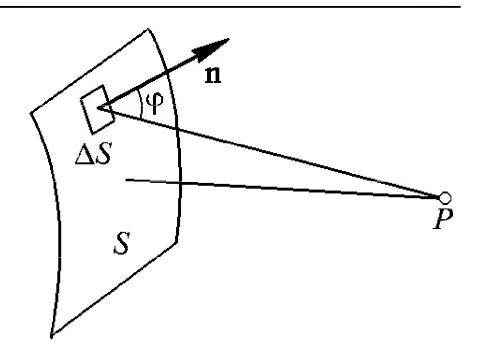


Рис. 199. К расчету дифракции на основе принципа Гюйгенса—Френеля

Пусть поверхность S представляет собой положение волновой поверхности в некоторый момент времени (рис. 199). Для того чтобы определить вызванные волной колебания в некоторой точке P, нужно, по Френелю, определить колебания, вызываемые в этой точке отдельными вторичными волнами, приходящими в нее от отдельных элементов поверхности S, и затем сложить эти колебания с учетом их амплитуд и фаз. При этом следует считать, что в точке P сказывается влияние только той части волновой поверхности S, которая не загораживается каким-либо препятствием.

Зоны Френеля. Проиллюстрируем применение принципа Гюйгенса—Френеля на следующем примере. Пусть на непрозрачную преграду с круглым отверстием падает слева плоская монохроматическая волна (рис. 200). Такую волну можно получить, например, от точечного источника монохроматического света, удаленного на бесконечность или помещенного в фокус собирающей линзы большого диаметра. Будем интересоваться освещенностью экрана в точке P, находящейся на оси симметрии.

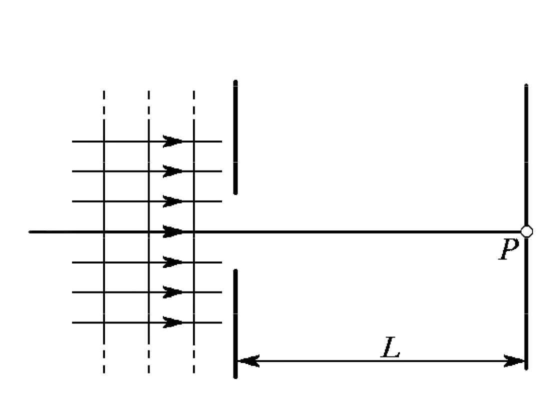


Рис. 200. Падение плоской монохроматической волны на преграду с круглым отверстием

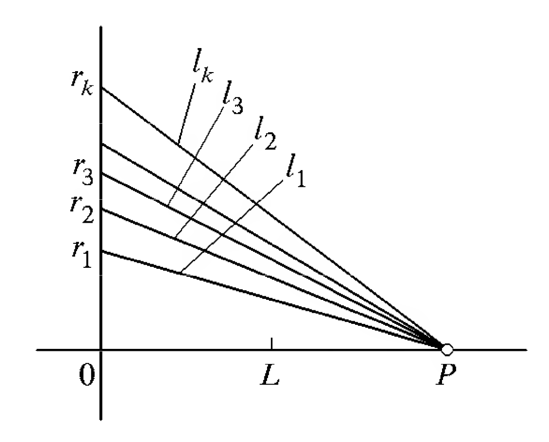


Рис. 201. Построение зон Френеля

Для учета интерференции вторичных волн Френель предложил мысленно разбить волновую поверхность падающей волны в месте расположения преграды на кольцевые зоны (*зоны Френеля*) по следующему правилу: расстояния от краев соседних зон до точки P (рис. 201) должны отличаться на половину длины волны, т. е.

$$l_1 = L + \frac{\lambda}{2}, \quad l_2 = L + 2\,\frac{\lambda}{2}, \quad \ldots, \quad l_k = L + k\,\frac{\lambda}{2}. \qquad (1)$$

Если смотреть на волновую поверхность из точки P, то зоны Френеля будут выглядеть так, как показано на рис. 202. Из рис. 201 легко найти радиусы зон Френеля:

$$r_k = \sqrt{l_k^2 - L^2} = \sqrt{k\lambda L + k^2 \frac{\lambda^2}{4}} \approx \sqrt{k\lambda L}. \qquad (2)$$

Видно, что радиус k-й зоны пропорционален $\sqrt{k}$, если $k\lambda/L \ll 1$. При выполнении этого условия площади зон Френеля можно считать одинаковыми. Результат интерференции вторичных волн в точке P, как мы увидим ниже, определяется тем, сколько зон Френеля открывает круглое отверстие на волновой поверхности.

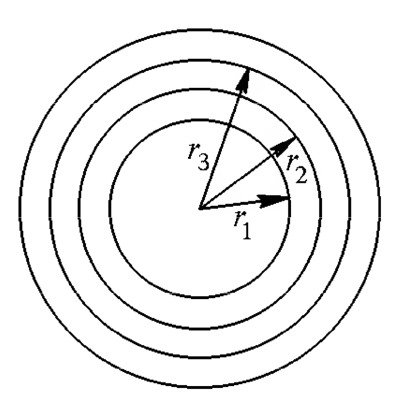


Рис. 202. Зоны Френеля

Дифракция Френеля на круглом отверстии. Предположим, что отверстие в преграде представляет собой диафрагму, диаметр которой можно изменять. Пусть сначала радиус отверстия много меньше радиуса первой зоны Френеля. Тогда можно считать, что колебания от всех точек волновой поверхности в этом маленьком отверстии приходят в точку P практически в одинаковой фазе. Изобразим колебание поля в точке P, вызванное этой вторичной волной, с помощью векторной диаграммы (рис. 203*а*). Этому колебанию на ней сопоставляется вектор $\Delta\mathbf{A}_1$, который вращается с угловой скоростью ω, равной циклической частоте падающей волны, в направлении против часовой стрелки. Увеличим отверстие диафрагмы еще немного, так чтобы площадь его удвоилась. Колебания, приходящие в точку P от вновь открытого участка волновой поверхности, несколько отстают по фазе и изображаются на диаграмме вектором $\Delta\mathbf{A}_2$. Длина этого вектора равна длине вектора $\Delta\mathbf{A}_1$, так как равны между собой площади соответствующих им участков волновой поверхности. Продолжая увеличивать отверстие диафрагмы, будем откладывать на диаграмме векторы, соответствующие приходящим в точку P колебаниям от вновь открываемых участков волновой поверхности. Колебаниям, приходящим в P от участка, прилегающего к границе первой зоны Френеля, будет соответствовать вектор $\Delta\mathbf{A}_n$, повернутый относительно $\Delta\mathbf{A}_1$ на π, так как, согласно определению зон Френеля, разность хода соответствующих им вторичных волн равна $\lambda/2$.

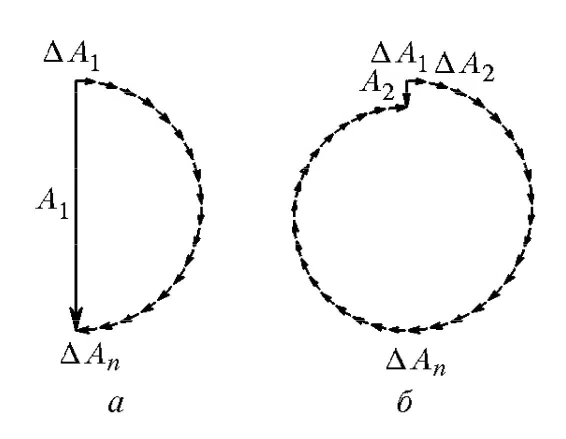


Рис. 203. Расчет амплитуды результирующего колебания в точке P с помощью векторных диаграмм: *а* — в отверстии укладывается одна зона Френеля; *б* —две зоны Френеля

Результирующее колебание в точке P, создаваемое волной, которая прошла через круглое отверстие, совпадающее с первой зоной Френеля, изображается вектором $\Delta \mathbf{A}_i$ (рис. 203*а*). Будем увеличивать отверстие диафрагмы дальше. Когда на нем будут умещаться две первые зоны Френеля, векторная диаграмма колебаний в точке P примет вид, изображенный на рис. 203*б*. При строгом равенстве амплитуд складываемых колебаний ΔA_i амплитуда результирующего колебания A_2 должна была бы равняться нулю, т. е. вторичные волны при двух открытых зонах Френеля полностью гасили бы друг друга в точке P. Однако действие даже одинаковых по площади участков волновой поверхности в точке P несколько убывает по мере увеличения угла φ между направлением на точку P и нормалью к волновой поверхности (см. рис. 199). Поэтому в действительности амплитуда A_2 имеет конечное, хотя и очень малое значение.

Таким образом, освещенность экрана в точке P, пропорциональная квадрату амплитуды результирующего колебания, будет по мере увеличения отверстия круглой диафрагмы меняться немонотонно. Пока открывается первая зона Френеля, освещенность в P увеличивается и становится максимальной при полностью открытой первой зоне. По мере открывания второй зоны Френеля освещенность убывает и при полностью открытой второй зоне уменьшается почти до нуля. Затем освещенность будет увеличиваться снова, и т. д.

Эти на первый взгляд парадоксальные результаты, предсказываемые на основе принципа Гюйгенса—Френеля, хорошо согласуются с экспериментом. Подчеркнем, что они находятся в вопиющем противоречии с предсказаниями геометрической оптики, согласно которой при падении плоской волны освещенность в точке P, лежащей на оси круглого отверстия, не зависит от диаметра отверстия.

Дифракция Френеля на круглом диске. Пятно Араго—Пуассона. Наиболее неожиданным в полученных выше результатах является, пожалуй, то, что при двух открытых зонах Френеля (и вообще при небольшом четном числе открытых зон) освещенность в точке P близка к нулю. Не менее неожиданным является то, что в точке P позади непрозрачного круглого экрана, расположенного на месте преграды с отверстием, освещенность не будет равна нулю, как это следовало бы из геометрической оптики. Если при этом непрозрачный круглый экран перекрывает лишь несколько первых зон Френеля, то в точке P освещенность будет почти такой же, как и без экрана.

В этом можно убедиться, если рассматривать вектор $\mathbf{A}$, изображающий колебания напряженности поля в точке P при полностью открытой волновой поверхности, как сумму двух векторов, один из которых изображает колебания от открытого участка волновой поверхности, а другой — от тех зон Френеля, которые перекрыты экраном. В центре геометрической тени оказывается свет — так называемое *пятно Араго—Пуассона*.

Это предсказание теории Френеля произвело сильное впечатление на его современников. В 1818 г. член конкурсного комитета Французской академии С. Пуассон, рассматривавший представленный на премию мемуар Френеля, пришел к выводу о том, что в центре тени маленького диска должно находиться светлое пятно, но счел этот вывод столь абсурдным, что выдвинул его как возражение против волновой теории света, развивавшейся Френелем. Однако другой член того же комитета Араго выполнил эксперимент, показавший, что это удивительное предсказание правильно.

Расстояния, на которых сказывается дифракция. Теперь не представляет труда оценить те условия наблюдения, при которых дифракционные явления становятся существенными и картина распределения освещенности на экране заметно отличается от предсказываемой геометрической оптикой. По геометрической оптике распределение освещенности на экране должно соответствовать форме отверстия, так что освещенность экрана равна нулю в области геометрической тени, а в точке P такая же, как и в отсутствие преграды. Но мы видели, что в случае, когда на отверстии укладывается лишь несколько зон Френеля, освещенность в точке P совсем иная. Это дает возможность оценить то расстояние L от отверстия до точки наблюдения, на котором именно дифракционные явления определяют наблюдаемую картину. Для этого в формуле (2) следует считать $k \sim 1$, а r_k положить равным размеру отверстия (или преграды) d. В результате находим

$$L \sim d^2/\lambda. \quad (3)$$

Построения Френеля позволяют легко рассчитать освещенность позади непрозрачного круглого экрана или экрана с круглым отверстием только в точках, лежащих на оси симметрии. Найти вид всей дифракционной картины на экране очень трудно.

Дифракция Фраунгофера. Но можно осуществить такие условия наблюдения дифракции света, при которых возможен полный расчет распределения освещенности в дифракционной картине на экране. Пусть плоская монохроматическая волна от бесконечно удаленного точечного источника падает на экран S с отверстием, а дифракционная картина наблюдается на экране в фокальной плоскости линзы (рис. 204). Так как в каждой точке фокальной плоскости линзы, например P на рис. 204, сходятся лучи, которые до линзы были параллельны между собой, то наблюдаемая здесь картина называется дифракцией в параллельных лучах. Как мы увидим в дальнейшем, линза не вносит дополнительной разности хода между параллельными до линзы лучами. Поэтому складывающи-

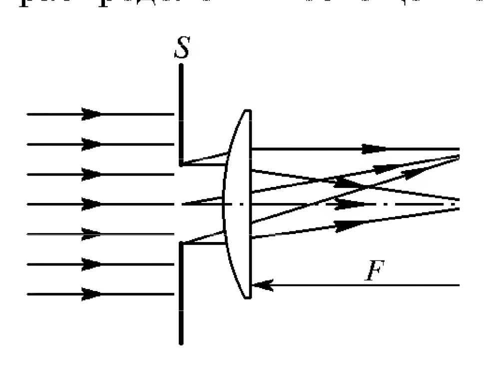


Рис. 204. Наблюдение дифракции в параллельных лучах

еся в точке P колебания имеют такую же разность фаз, как и до линзы на плоскости, перпендикулярной к этим лучам. Такая схема наблюдения дифракции была предложена И. Фраунгофером.

Пусть отверстие в экране S представляет собой щель шириной d (рис. 205), которую считаем бесконечно протяженной в направлении

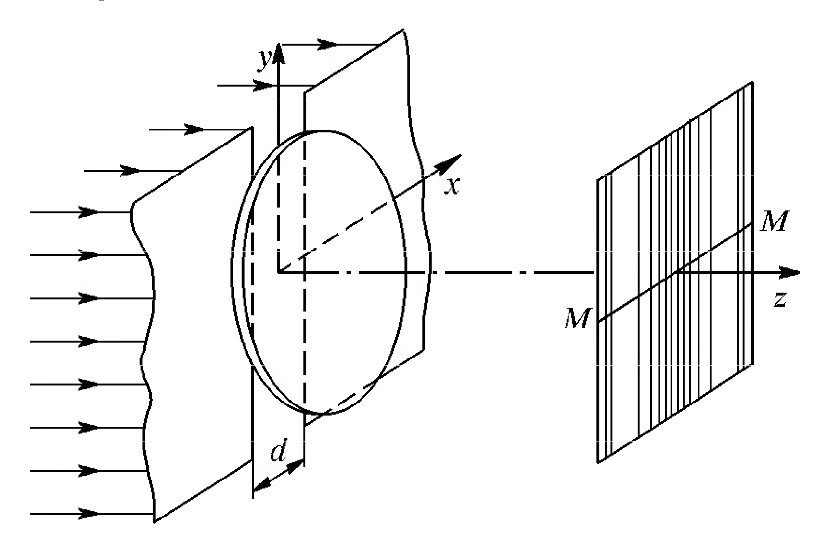


Рис. 205. Наблюдение дифракции от щели с параллельными краями

оси y. Построенные по принципу Гюйгенса волновые поверхности позади щели представляют собой цилиндрические поверхности с образующей, параллельной краям щели (рис. 206). Так как волновая поверхность в направлении оси y не ограничена, то дифракционных эффектов в этом направлении быть не может. Поэтому весь прошедший через линзу и попадающий на экран дифрагированный свет будет сосредоточен вдоль линии MM, лежащей в плоскости xz. Вместо изображения точечного источника в фокальной плоскости линзы, которое было бы в отсутствие щели, получается дифракционная картина, вытянутая вдоль линии MM.

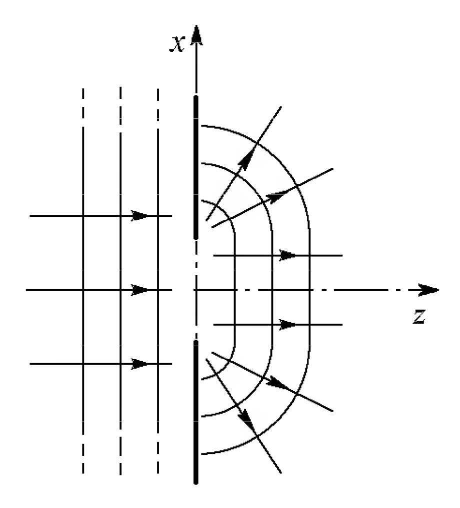


Рис. 206. Волновые поверхности, построенные по принципу Гюйгенса

Если создающий падающую волну точечный источник сместить вдоль оси y так, чтобы падающие на щель параллельные лучи образовали некоторый угол с осью z, то дифракционная картина на экране, не изменяя своего вида, сместится из положения MM на такой же угол. Поэтому при замене точечного источника света на тонкую светящуюся линию, параллельную оси y, каждый ее точечный элемент будет создавать свою дифракционную картину, параллельную MM, а вся дифракционная картина на экране будет состоять из параллельных светлых и темных полос, как показано на рис. 205. Для ее нахождения достаточно рассмотреть только плоскость xz.

Согласно принципу Гюйгенса—Френеля волновую поверхность падающей волны в щели на оси x следует разбить на столь малые участки, чтобы колебания в точке наблюдения P, вызываемые вторичными волнами от всех точек одного участка, имели почти одинаковую фазу. Колебания в точке P, вызываемые вторичными волнами, распространяющимися под углом θ от разных участков (рис. 207), следует просуммировать с учетом сдвигов по фазе. Это удобно сделать с помощью векторной диаграммы, построенной на рис. 208.

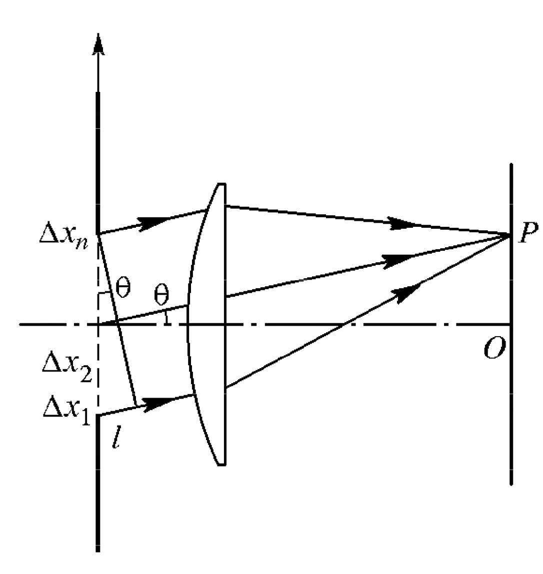


Рис. 207. К расчету суммарного колебания в точке P

Вектор $\Delta\mathbf{A}_1$ изображает колебания, приходящие в точку P от участка Δx_1, лежащего вблизи нижнего края щели. Вектор $\Delta\mathbf{A}_2$, изображающий колебания от соседнего участка Δx_2, повернут относительно $\Delta\mathbf{A}_1$ на некоторый небольшой угол. Вектор $\Delta\mathbf{A}_n$, изображающий колебания от последнего участка Δx_n, лежащего у верхнего края щели, повернут относительно вектора $\Delta\mathbf{A}_1$ на угол φ, соответствующий разности хода $l = d\sin\theta$ (рис. 207) между лучами, приходящими от краев щели. Чтобы найти сдвиг по фазе φ между колебаниями в точке P, вызванными волнами с разностью хода l, следует учесть, что сдвиг по фазе равен 2π при разности хода λ:

$$\varphi = 2\pi\frac{l}{\lambda} = 2\pi\frac{d\ \sin\theta}{\lambda}. \qquad (4)$$

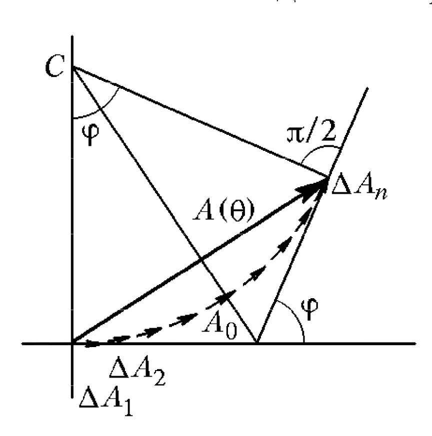


Рис. 208. Сложение колебаний с помощью векторной диаграммы

Найдем длину суммарного вектора $\mathbf{A}(\theta)$, которая равна амплитуде колебаний в точке наблюдения P. Легко видеть, что вектор $\mathbf{A}(\theta)$ представляет собой хорду окружности с центром в точке C (рис. 208). Прежде всего отметим, что длина дуги, стягиваемой хордой $A(\theta)$, равна амплитуде колебаний A_0 в точке O на экране, так как в эту точку вторичные волны от всех участков Δx_i, распространяясь под углом $\theta = 0$, приходят в одинаковой фазе и все векторы $\Delta\mathbf{A}_n$ имеют для точки O одинаковые направления. Длину дуги A_0 и длину хорды $A(\theta)$ легко связать между собой из геометрических соображений. Из рис. 208 видно, что

$$\frac{A(\theta)}{2} = R\sin\frac{\varphi}{2} = \frac{A_0}{\varphi}\sin\frac{\varphi}{2},$$

откуда

$$A(\theta) = A_0 \frac{\sin(\varphi/2)}{\varphi/2}. \qquad (5)$$

Освещенность экрана $E(\theta)$ в точке P, пропорциональная квадрату амплитуды колебаний, связана с освещенностью E_0 в точке O, согласно (5), следующим соотношением:

$$E(\theta) = E_0 \frac{\sin^2(\varphi/2)}{(\varphi/2)^2}, \qquad (6)$$

где φ дается формулой (4). Распределение освещенности на экране $E(\theta)$ при дифракции плоской волны на длинной щели показано на рис. 209. Вместо бесконечно узкой линии, которая получалась бы в фокальной плоскости линзы согласно законам геометрической оптики, на экране получаются дифракционные полосы, параллельные щели. Рядом с яркой центральной полосой будут слабые побочные полосы, отделенные друг от друга полной темнотой, причем ширина побочных полос вдвое меньше ширины центральной.

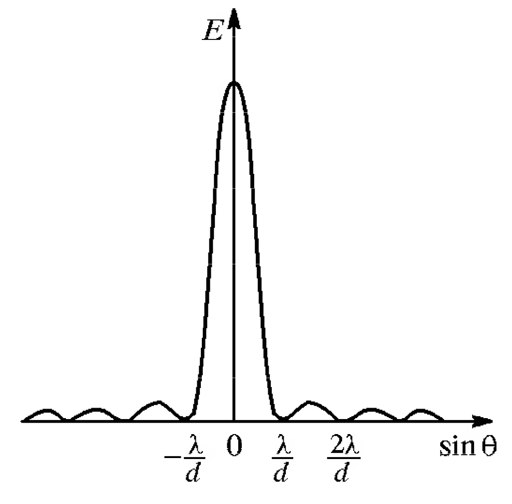


Рис. 209. Распределение освещенности на экране при дифракции плоской волны на щели

Освещенность в центре первой побочной полосы, как видно из формулы (6), почти в 25 раз меньше освещенности в центре картины. Освещенность обращается в нуль тогда, когда аргумент синуса в (6) кратен π. Это соответствует углам дифракции θ, при которых, как видно из (4),

$$d \sin\theta = k\lambda, \quad k = \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad (7)$$

Отметим, что положение минимумов освещенности легко найти и без помощи формулы (6). Для этого достаточно только сообразить, что минимумам соответствует разность хода l между крайними лучами (рис. 207), равная целому числу длин волн λ. Действительно, если разность хода l равна, например, λ, то всю щель можно разбить на пары одинаковых участков, отстоящих друг от друга на $d/2$. Разность хода вторичных волн от каждой такой пары равна $\lambda/2$, и эти волны в точке наблюдения гасят друг друга.

Чем уже щель, тем шире дифракционные полосы. Из формулы (7) видно, что при уменьшении ширины щели d до размеров порядка длины волны λ центральная полоса расплывается на весь экран.

- В чем заключаются особенности дифракционных явлений в оптике?
- Сформулируйте принцип Гюйгенса—Френеля. Как рассчитать колебания в некоторой точке, вызываемые проходящей через отверстие в экране световой волной?

- Что такое зоны Френеля? Как осуществляется их построение?
- Докажите, опираясь на формулу (2), что площади зон Френеля одинаковы.
- Как объяснить периодические изменения освещенности в центре дифракционной картины от круглого отверстия при монотонном изменении диаметра отверстия или расстояния от отверстия до экрана?
- Как оценить расстояние от препятствия (экрана или отверстия в нем) до точки наблюдения, при котором становятся заметными дифракционные явления?
- Чем отличаются условия наблюдения дифракции Фраунгофера и дифракции Френеля?
- Покажите, что дифракция Френеля и дифракция Фраунгофера не представляют собой разные физические явления, а соответствуют разным условиям наблюдения одного и того же явления. Сравните дифракцию Френеля при $L = \infty$ с дифракцией Фраунгофера.
- Как изменятся ширина центральной полосы при дифракции Фраунгофера на щели и освещенность в ее середине, если ширину щели увеличить вдвое? Изменится ли при этом отношение освещенностей в побочных и центральной дифракционных полосах?

§ 32. Спектральные приборы. Дифракционная решетка

Назначение *спектральных приборов* — исследовать спектральный состав излучения, т. е. определить, из каких монохроматических волн оно состоит. Иначе говоря, спектральный прибор производит гармонический анализ излучения. Действие спектральных приборов основано на том, что в некоторых физических системах условия прохождения света разной длины волны оказываются различными. Проявление этих различий называют *дисперсией*, а сами системы — диспергирующими.

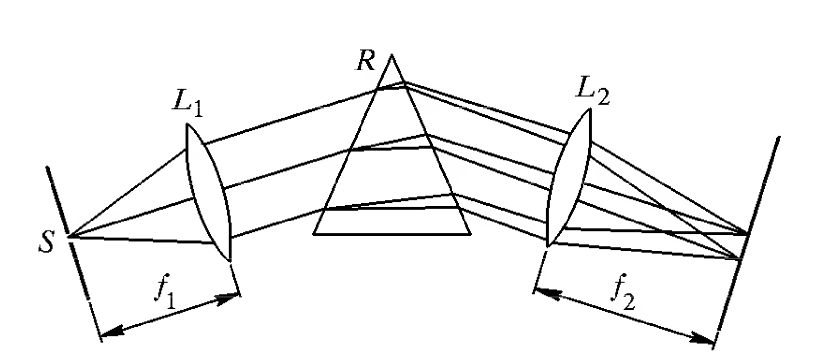


Рис. 210. Принципиальная схема спектрального прибора

Разложение излучения в спектр. В экспериментах по изучению спектров обычно используют призму или дифракционную решетку. Принципиальная схема простейшего спектрального прибора показана на рис. 210. Щель S, на которую падает исследуемое излучение, находится в фокальной плоскости линзы L_1. Эта часть прибора называется коллиматором. Выходящий из линзы параллельный пучок света падает на призму R. Вследствие дисперсии света в веществе призмы свет разных длин

волн выходит из призмы под разными углами. В фокальной плоскости линзы L_2 помещается экран или фотопластинка, на которой фиксируется приходящее излучение. Линза фокусирует параллельные пучки лучей, и в результате образуются изображения входной щели в разных местах экрана для разных длин волн.

Идеальным был бы такой спектральный прибор, на выходе которого распределение энергии падающего излучения определялось бы только спектральным составом излучения и не зависело бы от конструкции прибора. Но любой реальный спектральный прибор всегда вносит искажения. Идеальный прибор при падении монохроматического излучения давал бы на выходе единственную бесконечно узкую спектральную линию. Однако в реальном приборе на выходе вместо узкой линии получается некоторое распределение освещенности, характеризуемое контуром определенной формы. Этот контур имеет конечную ширину, что ограничивает способность прибора разделять две близко расположенные спектральные линии.

Дифракция света на решетке. В наиболее совершенных спектральных приборах в качестве диспергирующего элемента используются *дифракционные решетки*. Лучшие дифракционные решетки представляют собой полированные стеклянные или металлические пластины, на которых алмазным резцом нанесены при помощи специальной делительной машины параллельные одинаковые штрихи, расположенные на строго одинаковых расстояниях друг от друга.

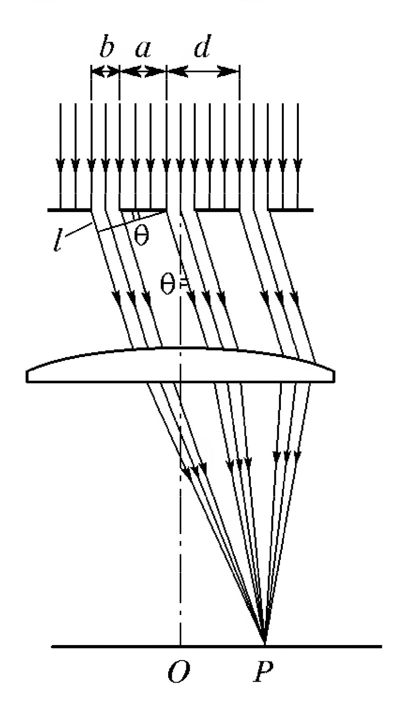


Рис. 211. К объяснению действия дифракционной решетки

Действие дифракционной решетки можно понять, рассматривая падение плоской монохроматической волны на регулярную периодическую структуру, состоящую из чередующихся параллельных друг другу щелей одинаковой ширины b, расположенных на одинаковом расстоянии a друг от друга (рис. 211). Сумма $a + b$ является периодом этой структуры и называется *постоянной решетки* d.

В каждой точке P на экране в фокальной плоскости линзы соберутся те лучи, которые до линзы были параллельны между собой и распространялись под определенным углом θ к направлению падающей волны. Поэтому освещенность в точке P определяется результатом интерференции вторичных волн, распространяющихся как от одной щели, так и от разных щелей. Колебание в точке P, вызываемое вторичными волнами от одной щели, было рассмотрено в предыдущем параграфе. Поэтому мы можем считать это колебание известным и для нахождения результирующего колебания сложить колебания от всех щелей с учетом сдвига по фазе между ними.

Главные максимумы. Легко найти те направления, распространяясь по которым вторичные волны от всех щелей будут приходить в точку P в фазе и усиливать друг друга. Так будет, если разность хода l между вторичными волнами, идущими из эквивалентных точек соседних щелей, равна целому числу длин волн (см. рис. 211):

$$d \sin \theta = n\lambda, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \tag{1}$$

В точках на экране, где собираются лучи, распространяющиеся под углами θ_n, удовлетворяющими условию (1), расположены так называемые *главные максимумы* дифракционной картины.

А какой вид имеет дифракционная картина между главными максимумами? Чтобы выяснить это, возьмем определенную решетку, имеющую большое число N периодов, и рассмотрим, как будет меняться освещенность на экране при постепенном переходе от главного максимума нулевого порядка ($n = 0$) к главному максимуму первого порядка ($n = 1$).

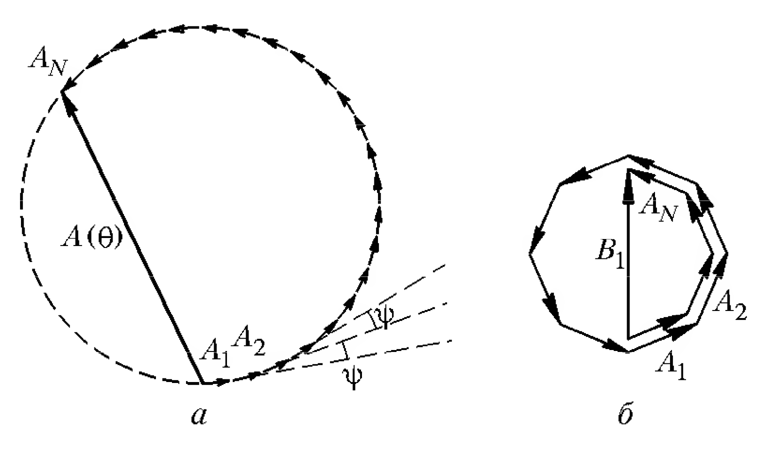


Рис. 212. Векторные диаграммы для нахождения результирующего колебания в точке P

Для нахождения амплитуды результирующего колебания воспользуемся методом векторных диаграмм. При $\theta = 0$ векторы $\mathbf{A}_i$, изображающие колебания от разных щелей, параллельны друг другу и при сложении дадут вектор $\mathbf{A}(\theta)$, длина которого A_0 в N раз больше длины вектора $\mathbf{A}_i$ и равна амплитуде колебаний в главном максимуме. По мере увеличения угла θ между колебаниями от соседних щелей появляется одинаковый сдвиг по фазе ψ, так что одинаковые по величине соседние векторы $\mathbf{A}_i$ повернуты относительно друг друга на угол ψ. В результате получается ломаная линия, вписанная в окружность (рис. 212*а*).

Если эта ломаная линия окажется замкнутой, то амплитуда результирующего колебания $\mathbf{A}(\theta)$ обратится в нуль, что приводит к полной темноте в соответствующих точках экрана. Замыкание ломаной линии из векторов $\mathbf{A}_i$ происходит при выполнении условия

$$N\psi = 2k\pi, \quad k = 1, 2, \dots, N - 1. \tag{2}$$

Значение $k = 1$ соответствует разности хода между пучками от первой и последней (т. е. N-й) щели, равной одной длине волны λ. Значение $k = 2$ соответствует разности хода, равной 2λ, и т. д. Значение $k = N$ в формуле (2) соответствовало бы разности хода между двумя пучками от соседних щелей, равной длине волны λ. Но это, как видно из формулы (1), есть как раз условие главного максимума пер-

вого порядка. Поэтому между главными максимумами нулевого и первого порядков располагаются $N - 1$ минимумов. Угловое положение этих минимумов определяется из соотношения (2) при учете, что сдвиг по фазе ψ между пучками от двух соседних щелей выражается через разность хода l между ними следующим образом (см. рис. 211):

$$\psi = 2\pi \frac{l}{\lambda} = 2\pi \frac{d \sin\theta}{\lambda}. \qquad (3)$$

Подставляя (3) в формулу (2), получаем условие для нахождения направлений на минимумы θ_{min}:

$$Nd \sin\theta_{min} = k\lambda, \quad k = 1, 2, \ldots, N-1. \qquad (4)$$

Положения $N - 1$ минимумов между главными максимумами первого и второго порядков даются той же формулой (4), в которой k уже пробегает значения от $N + 1$ до $2N - 1$, и т. д. Очевидно, что между $N - 1$ минимумами располагаются $N - 2$ максимумов, которые в отличие от главных называются побочными. Эти максимумы возникают, когда ломаная линия на векторной диаграмме, образованная векторами $\mathbf{A}_i$, частично налагаясь сама на себя, оканчивается в верхней точке окружности, так что замыкающий ее вектор результирующего колебания $\mathbf{A}(\theta)$ проходит по диаметру окружности.

На рис. 212*б* показана векторная диаграмма, соответствующая направлению на первый побочный максимум, расположенный рядом с главным. С помощью рисунка легко видеть, что при большом числе штрихов N амплитуда колебаний в этом максимуме B_1 связана с амплитудой колебаний в главном максимуме A_0 соотношением $B_1 = \frac{2}{3\pi} A_0$. Пропорциональная квадрату амплитуды освещенность будет в центре первого побочного максимума почти в 25 раз меньше, чем в центре главного. Остальные побочные максимумы будут еще слабее.

Распределение дифрагировавшего света по максимумам разных порядков. Как мы видели, амплитуда колебаний в главном максимуме в N раз больше амплитуды колебаний, создаваемых в этой точке вторичной волной от одной щели. Но амплитуда колебаний от одной щели зависит от угла θ и определяется формулой (5) предыдущего параграфа. Поэтому амплитуды результирующего колебания в главных максимумах разных порядков различны. Картина распределения освещенности на экране показана на рис. 213 для дифракционной решетки, содержащей $N = 4$ щели, причем ширина щели b в три раза меньше периода d. Огибающая главных максимумов соответствует распределению освещенности в дифракционной картине от одной щели (см. рис. 209).

Легко видеть, что главный максимум определенного порядка пропадает, если его положение совпадает с каким-нибудь минимумом дифракционной картины от одной щели. Сравнивая условие

$d \sin\theta = n\lambda$, определяющее главный максимум решетки, с условием минимума в дифракционной картине от одной щели $b \sin\theta = k\lambda$, видим, что условие исчезновения главного максимума n-го порядка можно записать в виде

$$\frac{b}{d} = \frac{k}{n}, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{5}$$

Здесь k не может принимать значения, равного n, ибо при этом $b = d$, т. е. решетки уже нет. На рис. 213 $b/d = 1/3$, поэтому отсутствует главный максимум третьего порядка. Таким образом, распределение энергии падающей на решетку плоской монохроматической волны по главным дифракционным максимумам разных порядков

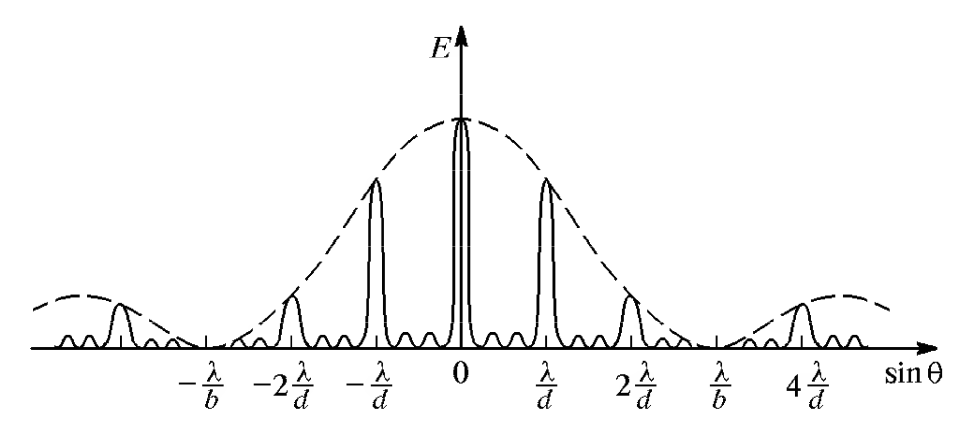


Рис. 213. Распределение освещенности для дифракционной решетки, содержащей четыре щели

зависит от отношения b/d, а в общем случае определяется структурой одного периода решетки. Положение главных дифракционных максимумов, определяемое формулой (1), при данной длине волны λ зависит только от периода решетки d. Оно не зависит ни от полного числа штрихов решетки N, ни от структуры каждого отдельного периода решетки. При увеличении полного числа штрихов N главные максимумы, оставаясь на прежних местах, становятся все резче и резче, так как между ними появляется все большее и большее число примерно равноотстоящих побочных максимумов.

Мы видим, что при использовании дифракционной решетки в качестве диспергирующего элемента спектрального прибора при падении монохроматической волны получается не одна спектральная линия, а набор главных максимумов конечной ширины. Если падающее излучение содержит свет нескольких длин волн λ_1, λ_2, ... , то главный максимум нулевого порядка для всех λ будет в одном и том же месте при $\theta = 0$, а положение главных максимумов первого, второго и т. д. порядков для разных длин волн будет различным в соответствии с формулой (1). Поэтому различают создаваемые решеткой спектры первого, второго и более высоких порядков.

Разрешающая способность решетки. Одной из важнейших характеристик дифракционной решетки является ее *разрешающая способность*, которая характеризует возможность разделить в падаю-

щем излучении две близкие длины волны λ и $\lambda + \Delta\lambda$. Разрешающей способностью называется отношение λ к минимально возможному значению $\Delta\lambda$, т. е. $\lambda/\Delta\lambda$. Считается, что две линии спектра, создаваемого решеткой, различимы, если главный максимум n-го порядка для длины волны $\lambda + \Delta\lambda$ подходит к n-му главному максимуму для длины волны λ не ближе, чем ближайший минимум для λ (рис. 214). Этот условный критерий разрешимости спектральных линий был предложен Дж. Рэлеем. При выполнении *критерия Рэлея* налагающиеся дифракционные картины образуют максимум с небольшим провалом посредине (рис. 214), что воспринимается глазом по контрасту как наличие темного промежутка между максимумами для длин волн λ и $\lambda + \Delta\lambda$.

Положение ближайшего к n-му главному максимуму минимума для длины волны λ определяется, в соответствии с формулой (4), соотношением

$$Nd \sin\theta = (Nn + 1)\,\lambda. \qquad (6)$$

Для положения n-го главного максимума для длины волны $\lambda + \Delta\lambda$, согласно формуле (1), можно написать

$$Nd \sin\theta = Nn\,(\lambda + \Delta\lambda). \qquad (7)$$

При выполнении критерия Рэлея левые части (6) и (7) совпадают. Поэтому

$$(Nn + 1)\,\lambda = Nn\,(\lambda + \Delta\lambda),$$

откуда

$$\lambda/\Delta\lambda = nN. \qquad (8)$$

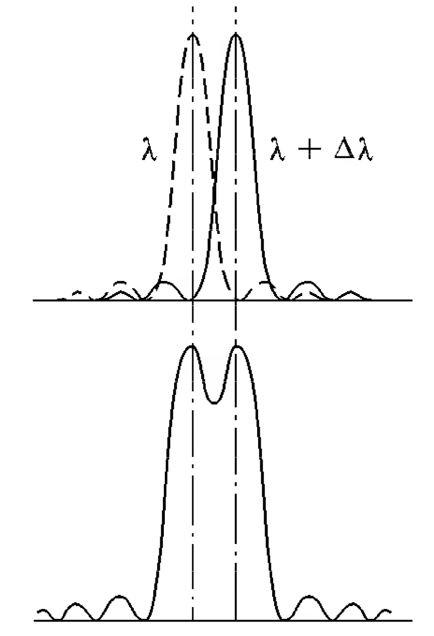


Рис. 214. Критерий Рэлея разрешимости спектральных линий

Разрешающая способность дифракционной решетки тем выше, чем больше в ней штрихов N и чем выше используемый порядок спектра n. Наибольший порядок спектра n_{max}, который можно получить с данной решеткой, ограничивается условием $|\sin\theta| \leqslant 1$:

$$d = n_{max}\lambda.$$

Чтобы решетка давала спектр хотя бы первого порядка, необходимо, чтобы период решетки d был не меньше длины волны λ. Современные решетки имеют до 1200 штрихов на 1 мм и разрешающую способность в спектре первого порядка до 100 000.

Щели конечной ширины в опыте Юнга. Вернемся к опыту Юнга, рассмотренному в § 30. Напомним, что этот опыт был рассмотрен в приближении точечных вторичных источников, которое применимо тогда, когда размер отверстий много меньше длины волны. Как мы видели, вместо точечных отверстий можно использовать бесконечно узкие параллельные щели, и вид интерференционной картины в центре экрана при этом не меняется.

Однако в реальном опыте щели всегда имеют конечную ширину. Теперь после того, как мы познакомились с действием дифракционной решетки, легко выяснить, как изменяется интерференционная картина в опыте Юнга при переходе к щелям конечной ширины. Для

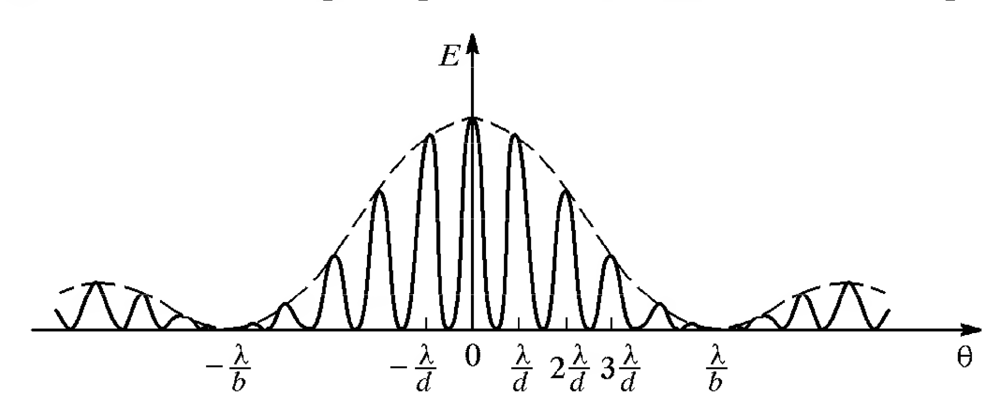


Рис. 215. Распределение освещенности в опыте Юнга в случае, когда ширина щели в пять раз меньше расстояния между центрами щелей

этого достаточно сообразить, что щели в опыте Юнга представляют собой дифракционную решетку, у которой полное число штрихов N равно двум. Правда, в опыте Юнга отсутствует линза, но наблюдаемая на удаленном экране интерференционная картина практически не отличается от той, которая наблюдается в фокальной плоскости линзы для решетки с двумя щелями, ибо приходящие в одну и ту же точку удаленного экрана лучи от двух близких щелей почти параллельны. На рис. 215 показано распределение освещенности на удаленном экране в опыте Юнга в случае, когда ширина щели b в пять раз меньше расстояния между центрами щелей d. Штриховая линия соответствует распределению освещенности экрана от одной щели.

Задачи

1. Две дифракционные решетки одного размера имеют разное полное число штрихов N_1 и N_2. Которая из них имеет более высокую разрешающую способность в спектре первого порядка и в спектре максимального порядка?

Ответ: В спектре первого порядка разрешающая способность $\lambda/\Delta\lambda$ выше у той решетки, которая имеет большее полное число штрихов. В спектре максимального для данной решетки порядка $n_{max} = d/\lambda$ разрешающая способность зависит не от полного числа штрихов N, а только от полного размера $L = dN$ решетки.

2. Определите направление θ_n на главный дифракционный максимум n-го порядка, если монохроматический свет длины волны λ падает на решетку с постоянной d под углом α.

Ответ: При наклонном падении плоской волны под углом α разность хода соседних пучков $\Delta = d\ (\sin\theta - \sin\alpha)$ и положение главных максимумов разных порядков определяется условием $d(\sin\theta_n - \sin\alpha) = n\lambda$.

- Что имеют в виду, когда говорят о спектральном составе излучения?
- Объясните принцип действия спектрального прибора, схема которого показана на рис. 210. Каково назначение его отдельных элементов?

- Чем отличается спектр излучения, наблюдаемый с помощью реального спектрального прибора, от того, что должен был бы дать идеальный прибор?
- Как устроена дифракционная решетка? Какая величина называется постоянной решетки?
- Поясните применение векторных диаграмм для определения положения максимумов и минимумов дифракционной картины.
- Покажите с помощью векторной диаграммы, что соседний с главным максимумом побочный максимум имеет в 25 раз меньшую освещенность.
- Каким условием определяется наибольший порядок спектра n_{max}?
- Какую максимальную длину волны можно наблюдать в спектре решетки с периодом d?
- Если число щелей дифракционной решетки увеличить вдвое, то интенсивность главных максимумов возрастет в четыре раза. Основываясь на энергетических соображениях, объясните, почему при этом ширина главных максимумов уменьшается в два раза.
- При каком отношении ширины щели к постоянной решетки в дифракционной картине будет отсутствовать главный максимум третьего порядка?
- Объясните, как используется критерий Рэлея при выводе формулы для разрешающей способности дифракционной решетки.

§ 33. Протяженные источники света

Рассмотренные выше интерференционные и дифракционные явления волновой оптики относились к случаю монохроматического света, излучаемого точечным источником. Однако все реальные источники света имеют конечные размеры, а излучаемый ими свет, как мы уже обсуждали выше, никогда не является строго монохроматическим. Поэтому интересно выяснить, к каким изменениям в результатах приведет отказ от монохроматической идеализации и учет конечных размеров источников света. Для простоты и большей наглядности выясним роль каждого из этих факторов в отдельности.

Начнем с учета конечных размеров источника. Будем считать, что реальный протяженный источник состоит из большого числа точечных взаимно некогерентных элементов, излучающих свет определенной длины волны. В этом случае интенсивность в любой точке волнового поля равна сумме интенсивностей от каждого точечного источника.

Рассмотрим изменение интерференционной картины в опыте Юнга, обусловленное использованием протяженного источника света. Разумеется, речь идет не об увеличении размеров источника в направлении, параллельном щелям: при использовании такого линейного источника вид интерференционной картины, как мы видели, не меняется. Речь идет и не об увеличении размеров вторичных когерентных источников, т. е. ширины щелей при использовании то-

чечного первичного источника света, — этот случай уже был рассмотрен в конце предыдущего параграфа. Сейчас нас будет интересовать вид интерференционной картины при использовании первичного источника конечной ширины, а сами щели будем для простоты считать бесконечно узкими. Мы увидим, что с увеличением ширины источника резкость интерференционных полос уменьшается вплоть до их полного исчезновения. Это накладывает определенные условия на размеры источников света в направлении, соединяющем отверстия или щели, при их использовании в интерференционных экспериментах по схеме Юнга.

Явление уменьшения резкости интерференционных полос, с которым приходится бороться в лабораторных экспериментах, нашло совершенно неожиданное и очень эффективное применение в астрономии.

Роль дифракции в телескопе. Одной из важнейших астрономических задач является определение углового расстояния двойных звезд, т. е. того угла, под которым видны эти звезды с Земли. Если звезды находятся на очень маленьком угловом расстоянии θ друг от друга, то даже с помощью самых совершенных телескопов эту задачу решить не удается, так как в фокальной плоскости объектива изображения этих звезд размыты вследствие явления дифракции и не могут быть разрешены. Согласно представлениям геометрической оптики параллельный пучок лучей, падающих на линзу объектива, должен собираться в одной точке фокальной плоскости. Поэтому изображение удаленной звезды, лучи от которой попадают в объектив практически параллельным пучком, должно получаться в виде точки.

Выясним теперь, как на самом деле выглядит в фокальной плоскости объектива телескопа изображение звезды, которую из-за очень большого удаления можно считать точечным источником. Чтобы получить представление об этом, будем пока считать, что перед объективом телескопа помещена длинная щель шириной d с параллельными прямыми краями. Поскольку приходящий от звезды свет можно рассматривать как плоскую волну, в фокальной плоскости объектива будет наблюдаться дифракционная картина от щели, которая была описана при рассмотрении дифракции в параллельных лучах. Распределение освещенности для этого случая было показано на рис. 209.

Освещенность экрана в первом боковом максимуме составляет, как было показано, менее 5 % освещенности в центре дифракционной картины. Это означает, что почти весь поток света, прошедший через щель, распространяется в интервале углов от $-\theta_1$ до θ_1, где угол θ_1 определяется формулой (7) § 31 при $k = 1$. Поскольку мы рассматриваем щель, ширина которой d много больше длины волны λ, то $\sin\theta_1$ можно заменить на θ_1, и тогда

$$\theta_1 = \lambda/d. \qquad (1)$$

Изображение бесконечно удаленного точечного источника в фокальной плоскости линзы оказывается размытым в полоску, перпендикулярную краям щели. Длина a этой полоски ограничена размером центрального дифракционного максимума и поэтому равна

$$a = 2F\theta_1 = 2\frac{\lambda}{d}F, \tag{2}$$

где F — фокусное расстояние линзы.

Рассмотрение дифракции на круглом отверстии диаметром D показывает, что изображение бесконечно удаленного источника размывается в круглое пятно, диаметр которого определяется той же формулой (2) с дополнительным числовым коэффициентом, близким к единице.

В телескопе роль круглого отверстия играет оправа объектива, и изображение звезды представляет собой создаваемую этой оправой дифракционную картину. Объективы большого диаметра могут давать изображение более высокого качества, так как (см. формулу (2)) уменьшается влияние дифракции.

Разрешение телескопа. Если в телескоп наблюдают две звезды, находящиеся на малом угловом расстоянии друг от друга, то дифракционные картины, создаваемые каждой звездой, налагаются одна на другую. Если при этом главные максимумы дифракционных картин сближаются на расстояние, меньшее радиуса центрального дифракционного пятна, то, согласно критерию Рэлея, измерить точно расстояние между ними, а тем самым и угловое расстояние между звездами, невозможно. Правда, современные методы обработки экспериментальных результатов позволяют разрешать дифракционные картины, для которых критерий Рэлея, строго говоря, не выполняется. Однако для оценки разрешающей способности телескопа это не принципиально.

Итак, минимальное угловое расстояние θ между звездами, которое можно измерить с помощью телескопа, равно

$$\theta \approx \theta_1 = \lambda/D. \tag{3}$$

По этой формуле легко оценить, что на телескопе-рефлекторе с диаметром зеркала $D = 6$ м в принципе можно измерять угловые размеры, не меньшие $0{,}02''$.

- Почему световые волны, испускаемые разными элементами поверхности протяженного источника, такого, как раскаленная нить лампочки, не создают интерференционной картины?
- Объясните, почему интерференционные полосы в опыте Юнга становятся менее отчетливыми по мере увеличения размеров первичного источника, освещающего щели.
- Какое применение в астрономии нашло явление уменьшения резкости интерференционных полос при использовании первичного источника света конечных размеров?

- Какую роль играет дифракция света в формировании изображения в фокальной плоскости объектива телескопа? Какую форму имело бы изображение удаленной звезды, если бы она была, например, пятиконечной?
- Что происходит с наблюдаемым в телескопе изображением звезды при уменьшении диаметра отверстия объектива?

Δ **Звездный интерферометр.** Для измерения еще меньших угловых размеров используется звездный интерферометр Майкельсона, идею которого можно понять из рис. 216. Основными элементами интерферометра являются непрозрачный экран A с двумя отверстиями, расстояние между которыми d можно изменять, собирающая линза L, расположенная непосредственно за экраном A, и экран B, находящийся в фокальной плоскости линзы, на котором наблюдаются интерференционные полосы.

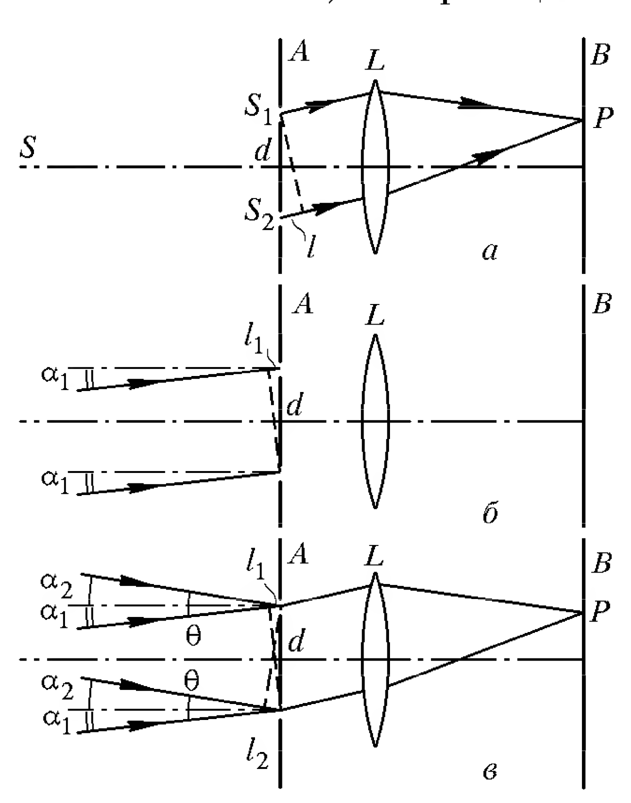


Рис. 216. К объяснению принципа действия звездного интерферометра

Это есть одна из возможных реализаций опыта Юнга, отличающаяся от рассмотренной ранее тем, что интерференционные полосы наблюдаются не на удаленном экране, а в фокальной плоскости линзы, роль которой в звездном интерферометре выполняет объектив телескопа-рефлектора. При изменении расстояния d между отверстиями резкость интерференционных полос изменяется, и по этим изменениям можно определить угловой размер двойной звезды θ.

Чтобы понять, почему меняется резкость полос, рассмотрим сначала интерференционную картину, создаваемую одним бесконечно удаленным точечным источником S. Если источник S расположен на оптической оси (рис. 216*а*), то фазы вторичных источников S_1 и S_2 совпадают и в некоторой точке P на экране B будет находиться светлая или темная полоса в зависимости от того, будет ли разность хода лучей l равна четному или нечетному числу полуволн. Если источник S смещен с оптической оси прибора на угол α_1, то создаваемая им интерференционная картина окажется сдвинутой, поскольку между вторичными источниками имеется разность фаз, обусловленная разностью хода лучей l_1 от

источника S до отверстий в экране A (рис. 216*б*):

$$l_1 = d\alpha_1. \tag{4}$$

При наблюдении двойной звезды, которую можно рассматривать как два взаимно некогерентных точечных источника, на экране B будут налагаться одна на другую две независимые интерференционные картины, создаваемые каждой звездой, и освещенность в любой точке экрана будет равна сумме освещенностей от каждой интерференционной картины.

Как будет выглядеть эта суммарная интерференционная картина? Она будет отчетливой, если светлые полосы одной картины приходятся на светлые полосы другой, и исчезнет совсем, если светлые полосы одной совпадут с темными полосами другой. Полное исчезновение полос произойдет, конечно, только тогда, когда звезды имеют одинаковую яркость.

Теперь легко понять, почему меняется резкость полос при изменении расстояния между отверстиями на экране A. Если отверстия расположены очень близко друг к другу, то, как видно из формулы (4), фазы вторичных источников S_1 и S_2 будут практически совпадать друг с другом как для одной, так и для другой звезды. Интерференционная картина будет отчетливой.

Если увеличить расстояние между отверстиями, то интерференционные картины от разных звезд будут смещаться относительно друг друга, и при некотором расстоянии d_0 светлые полосы одной картины совпадут с темными полосами другой — интерференционная картина исчезнет. Пусть в некоторой точке P (рис. 216*в*) находится светлая полоса одной интерференционной картины и темная — другой. Это означает, что световые колебания от одной звезды приходят в точку P в фазе, от другой — в противофазе. Поскольку разность хода лучей от вторичных источников S_1 и S_2 до точки P одинакова для обеих интерференционных картин, нетрудно сообразить, что наложение светлой полосы на темную имеет место при выполнении условия

$$l_1 + l_2 = (2k + 1)\,\frac{\lambda}{2}, \tag{5}$$

где k — любое целое число. С помощью формулы (4) условие полного исчезновения интерференционной картины (5) можно записать в виде

$$d_k(\alpha_1 + \alpha_2) = d_k\theta = (2k + 1)\,\frac{\lambda}{2}.$$

Итак, при увеличении расстояния d между отверстиями первое исчезновение интерференционной картины происходит при

$$d = d_0 = \frac{\lambda}{2\theta}. \tag{6}$$

При дальнейшем увеличении d интерференционные полосы появляются снова, затем снова исчезают и т. д.

Измерив расстояние между отверстиями интерферометра d_0, при котором впервые исчезает интерференционная картина, мы получаем возможность с помощью формулы (6) вычислить угловой размер двойной звезды. Как видно из этой формулы, чувствительность прибора тем больше, чем больше может быть сделано расстояние между щелями на объективе.

Оценим, какой минимальный угловой размер двойной звезды можно измерить с помощью интерферометра на базе шестиметрового телескопа: при $\lambda = 5500$ Å он равен

$$\theta_{\min} = \lambda/2D \approx 0{,}01''.$$

Небольшим изменением рассмотренной выше конструкции звездного интерферометра Майкельсон сумел добиться высокого углового разрешения даже с помощью телескопа со сравнительно небольшим диаметром объектива. Он предложил свет от двойной звезды направлять через щели в объектив не непосредственно, как на рис. 216*в*, а после отражения от системы зеркал, действие которых понятно из рис. 217. Расположенные против щелей S_1 и S_2 зеркала M_1 и M_2 закреплены неподвижно, а зеркала M_3 и M_4 можно симметрично раздвигать. При этом сдвиг интерференционной картины от одной звезды относительно картины от другой и, следовательно, разрешающая способность прибора определяется расстоянием между зеркалами M_3 и M_4, хотя расстояние между интерференционными полосами зависит от расстояния между щелями и не меняется.

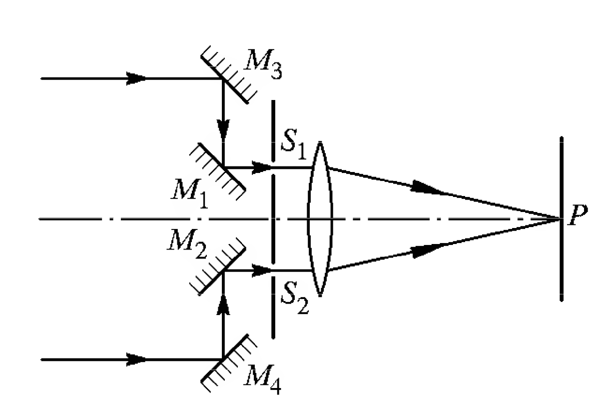


Рис. 217. Схема звездного интерферометра Майкельсона

Рассмотрим теперь, какой вид будет иметь интерференционная картина, если вместо двух некогерентных точечных источников света имеется один протяженный источник с угловым размером θ. В этом случае каждый точечный элемент, на которые можно разбить протяженный источник, создает свою интерференционную картину. Так как все эти источники некогерентны, то их интерференционные картины просто налагаются друг на друга.

Выясним, как меняется резкость суммарной картины от протяженного источника в виде светящейся полоски при постепенном увеличении расстояния d между щелями интерферометра. Если это расстояние очень мало, то положения полос интерференционных картин от всех точечных элементов светящейся полоски практически совпадают и суммарная картина имеет максимальную

резкость. По мере увеличения расстояния d резкость картины уменьшается, и при некотором значении d_0 полосы пропадают.

Найти d_0 можно следующим образом. Мысленно разобьем равномерно светящуюся полоску на пары одинаковых элементов так, чтобы расстояние между элементами любой пары равнялось половине длины полоски. Угловое расстояние между элементами каждой пары, очевидно, равно $\theta/2$. Если положение светлых полос интерференционной картины одного элемента пары совпадает с положением темных полос картины, создаваемой вторым элементом этой пары, то экран оказывается равномерно освещенным, так как условия совпадения одинаковы для всех пар элементов.

Из этих рассуждений следует, что условие исчезновения интерференционных полос от протяженного источника с угловым размером θ дается той же формулой (6), что и от двух точечных источников, только в ней следует заменить θ на $\theta/2$:

$$d_0 = \lambda/\theta. \qquad (7)$$

В случае источника в виде равномерно светящегося диска условие исчезновения интерференционной картины будет отличаться от (7) лишь числовым множителем, близким к единице.

Звездный интерферометр Майкельсона позволяет определять не только угловое расстояние между компонентами двойных звезд, но и угловые диаметры не слишком удаленных одиночных звезд. Первой звездой, у которой Майкельсону удалось измерить угловой диаметр, была Бетельгейзе, относящаяся к так называемым красным гигантам. Он оказался равным $0{,}047''$. Зная расстояние до Бетельгейзе, измеренное по параллаксу, можно было вычислить линейный диаметр звезды, оказавшийся равным примерно $4 \cdot 10^8$ км, что превышает диаметр земной орбиты ($3 \cdot 10^8$ км).

Формула (7) определяет допустимые размеры источника при проведении интерференционных опытов по схеме Юнга: угловой размер источника θ, видимый от щелей в экране, не должен превышать отношения длины волны λ к расстоянию между щелями d. ▲

- Объясните принцип действия звездного интерферометра Майкельсона. Как по наблюдаемой картине отличить двойную звезду от одиночной?
- Почему при увеличении расстояния между зеркалами звездного интерферометра интерференционные полосы от двойной звезды практически исчезают и появляются снова?
- Чем объясняется исчезновение интерференционных полос в звездном интерферометре при увеличении расстояния между зеркалами, если наблюдается одиночная, но очень большая звезда? Как из этих наблюдений можно оценить ее угловой размер?
- При какой максимальной ширине D_{max} источника света в виде узкой полоски можно наблюдать интерференционные полосы в опыте Юнга, если расстояние между щелями $d = 0{,}5$ мм, расстояние от источника до щелей $L = 1$ м, а длина волны $\lambda = 5 \cdot 10^{-5}$ м?

§ 34. Интерференция немонохроматического света

В этом параграфе мы рассмотрим изменения в интерференционных явлениях, которые вызываются отказом от монохроматической идеализации и учетом спектрального состава излучения реальных источников света.

Простейшая модель немонохроматического источника. Начнем с простейшего случая точечного источника, излучающего две очень узкие, близкие друг к другу спектральные линии с частотами ω_1 и ω_2. Если бы излучение на каждой из частот являлось бесконечной синусоидой, то результирующее излучение представляло бы собой волну средней частоты с периодически меняющейся амплитудой. Но в действительности вместо бесконечных синусоид излучаются более или менее длинные цуги волн определенной длины, причем начальные фазы колебаний в последовательно идущих цугах произвольны и никак не связаны друг с другом. Обычно за время наблюдения проходит много таких цугов, и поэтому излучения на частотах ω_1 и ω_2 можно считать независимыми.

Другими словами, в описанной ситуации можно считать, что вместо одного имеется два расположенных в одном месте точечных источника, независимо друг от друга излучающих волны с частотами ω_1 и ω_2. При выполнении интерференционных опытов с таким источником света каждая из волн создает свою интерференционную картину, и эти картины просто налагаются друг на друга.

Если частоты ω_1 и ω_2 мало отличаются друг от друга, то интерференционные полосы в каждой картине имеют почти одинаковую ширину. В тех местах, где светлые полосы одной картины налагаются на светлые полосы другой, резкость суммарной картины наибольшая. Наоборот, там, где светлые полосы одной картины приходятся на темные полосы другой, резкость интерференционных полос уменьшается вплоть до их полного исчезновения.

Картина от двух близких спектральных линий. Найдем распределение освещенности в интерференционной картине, получаемой от двух вторичных источников, если первичный источник излучает две близкие спектральные линии одинаковой интенсивности. Интерференционная картина для отдельной спектральной линии была рассмотрена в § 30. Зависимость освещенности от разности хода l от вторичных источников до точки наблюдения дается формулой (5) этого параграфа:

$$E(l) = 4E_0 \cos^2 \frac{\omega l}{2c} = 2E_0 \left(1 + \cos \frac{\omega l}{c}\right). \qquad (1)$$

Здесь E_0 — равномерная освещенность, которую создавал бы только один вторичный источник.

В рассматриваемом случае каждая спектральная линия первичного источника дает интерференционную картину, распределение освещенности в которой описывается формулой (1) с соответствующим значением частоты ω_1 или ω_2. Поэтому полное распределение освещенности, получающееся в результате наложения двух интерференционных картин от двух некогерентных источников, имеет следующий вид:

$$E(l) = E_1(l) + E_2(l) = 2E_{01}\left(1 + \cos\frac{\omega_1 l}{c}\right) + 2E_{02}\left(1 + \cos\frac{\omega_2 l}{c}\right). \quad (2)$$

Поскольку спектральные линии имеют одинаковую интенсивность, то $E_{01} = E_{02} = E_0$ и формулу (2) можно преобразовать с помощью формулы для суммы косинусов двух углов:

$$E(l) = 4E_0\left(1 + \cos\frac{\Delta\omega l}{2c}\cos\frac{\omega l}{c}\right), \quad (3)$$

где $\omega = (\omega_1 + \omega_2)/2$ — средняя частота, а $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ — разность частот спектральных линий. Если частоты ω_1 и ω_2 близки, так

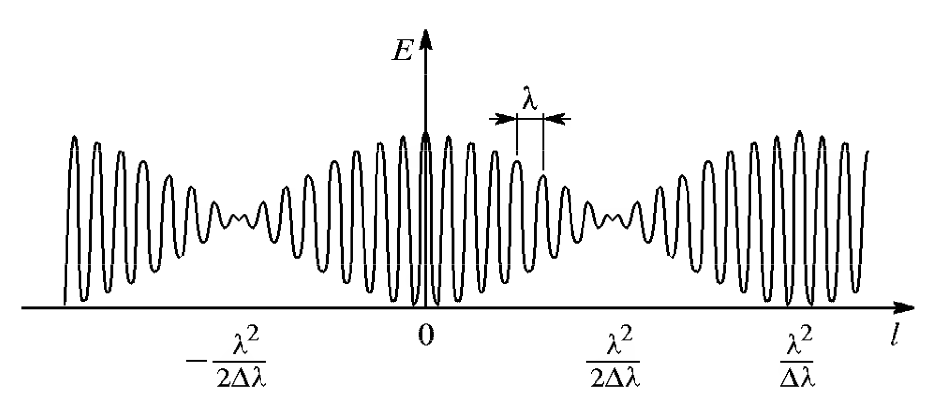


Рис. 218. Интерференционная картина в случае, когда источник света излучает две близкие спектральные линии

что $\Delta\omega \ll \omega$, то резкость интерференционных полос медленно меняется с изменением разности хода l и распределение освещенности в зависимости от l имеет вид, показанный на рис. 218.

Расстояние между соседними полосами определяется множителем $\cos(\omega l/c)$ и соответствует разности хода Δl, равной одной длине волны λ: $\omega\Delta l/c = 2\pi$, откуда $\Delta l = 2\pi c/\omega = cT = \lambda$. Период изменения резкости полос определяется множителем $\cos(\Delta\omega\, l/2c)$ и соответствует разности хода Δl, равной произведению длины волны λ на отношение $\lambda/\Delta\lambda$. Действительно, как видно из рис. 218, период изменения резкости полос равен половине периода $\cos(\Delta\omega\, l/2c)$, поэтому $\cos(\Delta\omega\, \Delta l/2c) = \pi$, откуда $\Delta l = \lambda^2/\Delta\lambda$.

Опыты с квазимонохроматическим светом. Как можно наблюдать на опыте такую интерференционную картину с периодическим изменением резкости полос? Так как для этого необходима разность

хода, равная очень большому числу длин волн, то наиболее удобно использовать интерферометр Майкельсона с подвижным зеркалом, схема которого приведена на рис. 198.

Если плечи интерферометра почти равны друг другу, то наблюдаемые полосы соответствуют разностям хода, равным небольшому числу длин волн. При этом, как видно из рис. 218, полосы имеют наибольшую резкость — почти равную нулю освещенность на месте темных полос. При перемещении зеркала разность хода l возрастает, а резкость интерференционных полос при этом постепенно убывает, так что при l порядка $\lambda^2/2\Delta\lambda$ полосы пропадают совсем. При дальнейшем перемещении зеркала полосы появляются снова, и при $l = \lambda^2/\Delta\lambda$ их резкость опять становится максимальной. Затем резкость снова убывает, и т. д.

Из изложенного ясно, что, наблюдая за изменением резкости интерференционных полос в зависимости от разности хода, можно получить информацию о спектральном составе исследуемого света.

Первые наблюдения такого рода были выполнены А. Физо в середине XIX века. В использованном им интерферометре появлялись кольца Ньютона при освещении желтым светом натриевой лампы. Интерференционные полосы в данном случае имеют вид колец, так как разность хода волн, отразившихся от нижней поверхности линзы и верхней поверхности стеклянной пластинки (рис. 219), одинакова вдоль окружностей. Если линзу постепенно отводить от пластинки, то та же самая разность хода будет получаться на окружности меньшего радиуса, поэтому интерференционные кольца будут стягиваться к центру.



Рис. 219. К опыту Физо с кольцами Ньютона

Физо нашел, что при контакте линзы с пластинкой кольца были резкими. При отодвигании линзы от пластинки резкость колец убывала, и при прохождении примерно 490-го кольца интерференционная картина исчезала. При дальнейшем увеличении расстояния кольца появлялись вновь и приобретали приблизительно первоначальную резкость при стягивании примерно 980-го кольца. Физо проследил периодическое изменение резкости полос в 52 периодах из 980 колец каждый! Отсюда он сделал правильный вывод о том, что натриевый свет состоит из двух спектральных линий почти равной интенсивности. Глядя на рис. 218, легко сообразить, что результаты опытов Физо дают для отношения $\lambda/\Delta\lambda$ у желтого дублета натрия значение, равное 980.

Длина и время когерентности. Рассмотренный пример света, состоящего из двух близких по частоте монохроматических волн, позволяет глубже проанализировать вопрос об использовавшейся в предыдущих параграфах монохроматической идеализации. Спектр испускания достаточно разреженных газов состоит из резких ярких линий, разделенных темными промежутками. Выделим свет одной

из этих почти монохроматических линий и используем его в интерферометре Майкельсона. Мы увидим, что интерференционные полосы будут резкими, если длины путей обоих интерферирующих пучков примерно одинаковы. Если отодвигать одно из зеркал так, чтобы разность хода пучков увеличивалась, то резкость интерференционных полос будет постепенно уменьшаться, и в конце концов они исчезнут.

Такое исчезновение интерференционных полос легко объяснить, если считать, что свет излучается отдельными цугами, содержащими конечное число длин волн. Допустим для простоты, что все волновые цуги одинаковы. Каждый цуг, попадая в интерферометр, делится на два цуга равной длины. Если разность хода в плечах интерферометра больше этой длины, один из цугов минует точку наблюдения раньше, чем другой дойдет до нее, и интерференция наблюдаться не будет.

Естественно ввести понятие *длины когерентности* как наибольшей разности хода интерферирующих лучей, при которой еще возможно наблюдение интерференционной картины. Длина когерентности характеризует степень отклонения рассматриваемого излучения от монохроматической идеализации и равна длине отдельных волновых цугов. Длину цуга волн можно характеризовать промежутком времени, в течение которого он проходит через точку наблюдения. Этот промежуток времени τ называется *временем когерентности*.

- Почему источник, излучающий свет двух узких спектральных линий, можно рассматривать как два независимых монохроматических источника, расположенных в том же месте?
- Опишите качественно вид интерференционных полос в случае источника, излучающего свет двух близких спектральных линий. При какой разности хода полосы исчезают?
- Каким образом Физо установил на опыте, что желтый свет натрия состоит из двух близких спектральных линий?
- Что такое длина и время когерентности квазимонохроматического света? Как связаны эти величины с длиной волновых цугов?
- Как с помощью представления о волновых цугах объясняется исчезновение интерференционных полос при больших разностях хода?

Δ **Время когерентности и ширина спектра.** Исчезновение интерференционных полос при увеличении разности хода можно объяснить и на другом языке, рассматривая спектральный состав излучения. Строго монохроматической волне (бесконечной синусоиде) соответствует единственная частота, т. е. бесконечно узкая спектральная линия. Будем считать, что излучению, состоящему из волновых цугов конечной протяженности, соответствует спектральная линия некоторой конечной ширины. Другими словами, такое излучение можно рассматривать как совокупность отдельных монохроматических волн, частоты которых сплошь за-

полняют некоторый интервал $\Delta\omega$, малый по сравнению со средней частотой ω. Каждая монохроматическая волна из этой совокупности создает в интерферометре свою интерференционную картину, и полное распределение освещенности определяется наложением этих картин.

При малых разностях хода интерферирующих лучей (порядка нескольких длин волн) положение интерференционных полос в картинах, создаваемых отдельными монохроматическими составляющими, будет практически совпадающим, и полосы суммарной картины будут отчетливыми. По мере увеличения разности хода отдельные интерференционные картины будут смещаться относительно друг друга, и в конце концов суммарная картина окажется полностью размытой.

Оценить разность хода, при которой происходит исчезновение интерференционных полос, можно следующим образом. Мысленно разобьем весь спектральный интервал $\Delta\omega$, занимаемый рассматриваемым излучением, на пары монохроматических компонент, отстоящих друг от друга на $\Delta\omega/2$. Распределение освещенности от каждой пары дается формулой (3), в которой $\Delta\omega$ следует теперь заменить на $\Delta\omega/2$. Оно показано на рис. 218. Как видно из этого рисунка, полосы пропадают при такой разности хода l, когда аргумент первого косинуса в (3) становится равным $\pi/2$. Заменяя $\Delta\omega$ на $\Delta\omega/2$, получаем

$$\Delta\omega l/4c = \pi/2. \tag{4}$$

Условие исчезновения полос для всех пар монохроматических компонент одинаково. Поэтому при разности хода l, даваемой соотношением (4), происходит размытие полной интерференционной картины.

Теперь мы можем сопоставить две возможные интерпретации размывания интерференционных полос при достаточно большой разности хода — в рамках представлений о волновых цугах конечной протяженности и о суперпозиции монохроматических компонент, распределенных в некотором интервале частот. Так как при этом максимальная разность хода l равна длине цуга, то отношение l/c в соотношении (4) есть время когерентности τ. Переходя для удобства от циклической частоты ω к частоте $\nu = \omega/2\pi$, переписываем (4) в виде

$$\tau\Delta\nu \approx 1. \tag{5}$$

Соотношение (5) следует рассматривать не как точное равенство, а только как оценку эффективного интервала частот $\Delta\nu$, границы которого в известной мере являются условными.

Мы видим, что чем больше длительность волновых цугов τ, тем более узок интервал частот $\Delta\nu$, в котором спектральные компоненты этого излучения имеют заметную величину. Иначе

говоря, ширина спектральной линии излучения обратно пропорциональна времени когерентности.

Приведем оценки допустимых значений разности хода $l \sim \lambda^2/\Delta\lambda$ при наблюдении интерференции света с использованием разных источников. Для белого солнечного света или света, излучаемого раскаленными телами, интервал длин волн в спектре $\Delta\lambda$ одного порядка со средней длиной волны. Поэтому наблюдать интерференцию можно только при очень малых разностях хода, равных небольшому числу длин волн.

Если воспользоваться излучением газоразрядной плазмы низкого давления, то при выделении какой-либо одной спектральной линии допустимая разность хода может быть значительно больше. Например, для красной линии кадмия с длиной волны $\lambda = 643{,}8$ нм, ширина которой $\Delta\lambda$ составляет всего лишь 0,0013 нм, допустимая разность хода l превышает 500 000 длин волн, т. е. 30 см. А ширина линии излучения лазера может быть сделана настолько малой, что удается наблюдать интерференцию при разности хода в несколько километров! ▲

- Как объясняется исчезновение интерференционных полос при больших разностях хода на основе представлений о конечной ширине частотного спектра квазимонохроматического излучения?
- Как связано время когерентности квазимонохроматического излучения с его спектральным составом?
- Оцените ширину спектральной линии излучения, с помощью которого можно было бы наблюдать интерференцию при разности хода в 1 м.
- Почему в интерферометре Майкельсона можно наблюдать интерференцию света только при одинаковой длине плеч? При какой максимальной разности хода можно наблюдать интерференционные полосы, если источник света излучает спектральную линию шириной $\Delta\lambda$?

§ 35. Физические принципы голографии

Голография — это способ записи и последующего восстановления световых волн, основанный на явлениях интерференции когерентных пучков света.

Разглядывая обычную фотографию, бессмысленно пытаться заглянуть за предметы, находящиеся на переднем плане. Это и естественно, так как фотография представляет собой плоское изображение объемной картины, полученное из определенной точки. В отличие от обычной фотографии, голография позволяет записать и восстановить не двумерное распределение освещенности в плоскости снимка, а рассеянную предметом световую волну со всеми ее характеристиками — амплитудой, фазой, длиной волны.

Само слово «голография» в буквальном переводе с греческого означает «полная запись». Восстановленные голограммой световые

волны, попадая в глаз наблюдателя, создают полную иллюзию реальности наблюдаемых предметов — их объемность и возможность изменения ракурса при смещении точки, в которой находится глаз.

Идеи, лежащие в основе голографической записи и восстановления зрительной информации, были высказаны английским физиком Д. Габором в 1947 г. Так как для практической реализации голографии необходим свет с высокой степенью когерентности, то широкое распространение она получила после создания лазеров.

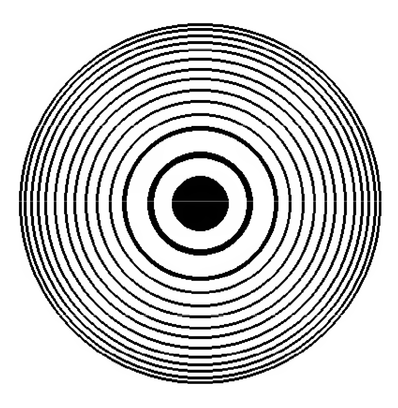


Рис. 220. Зонная пластинка Френеля

Зонная пластинка. Чтобы понять принцип голографической записи и восстановления световых волн, рассмотрим действие так называемой *зонной пластинки Френеля.* Возьмем плоскую прозрачную пластинку, на которой нанесены концентрические окружности, радиусы которых r_k равны радиусам зон Френеля, видимым из некоторой точки P. Эти радиусы даются формулой (2) в § 31 «Дифракция света». Таким образом, вся пластинка оказывается разбитой на зоны Френеля для некоторого значения длины волны λ. Теперь все нечетные (или, наоборот, четные) зоны Френеля должны быть сделаны непрозрачными. Это и есть зонная пластинка Френеля (рис. 220).

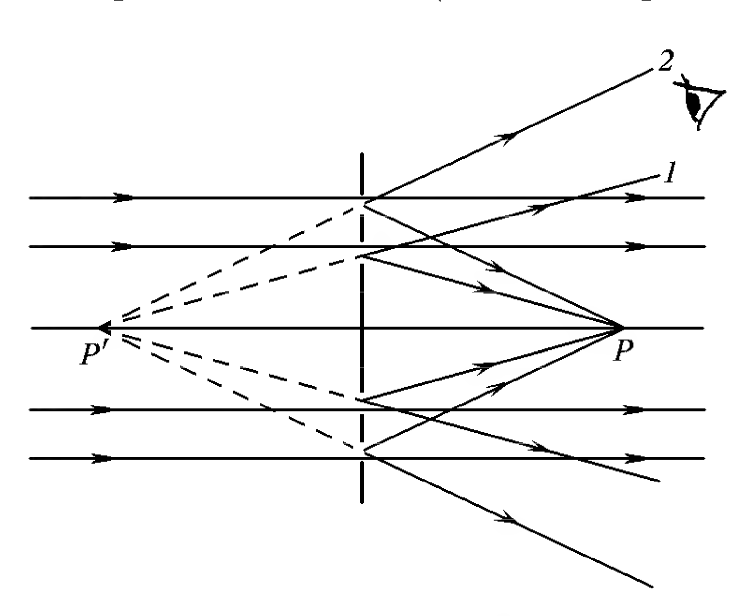


Рис. 221. К восстановлению изображения точечного источника с помощью голограммы

Фокусирующее действие зонной пластинки. Предположим, что на зонную пластинку падает по нормали плоская монохроматическая волна длины λ. Тогда все прозрачные зоны можно рассматривать как источники когерентных вторичных волн. В точке P (рис. 221) эти вторичные волны будут, интерферируя, усиливать друг друга, так как разности хода между волнами, идущими от двух соседних прозрачных зон, равны длине волны λ. Точка P является, таким образом, тем фокусом, в котором сходятся волны, испытавшие дифракцию при прохождении через пластинку.

Но, кроме сходящейся в точке P сферической волны, в результате дифракции на зонной пластинке возникает также расходящаяся сферическая волна, центр которой расположен в симметричной точке P' перед пластинкой (рис. 221): лучи *1*, *2*, ... будут восприниматься гла-

зом как выходящие из одной точки P', так как разность хода между такими лучами, как ясно из рисунка, равна целому числу длин волн, что эквивалентно отсутствию разности хода вообще. Таким образом, точка P' представляет собой мнимый фокус расходящегося пучка лучей *1*, *2*, ..., возникающих в результате дифракции плоской волны на зонной пластинке.

Кроме сходящейся и расходящейся сферических волн, позади пластинки будет, разумеется, и плоская волна, так как у лучей, прошедших через прозрачные зоны пластинки без изменения направления, разность хода равна нулю.

Зонную пластинку Френеля можно получить фотографическим способом. Для этого достаточно поставить светочувствительную пластинку вместо экрана, на котором наблюдается интерференция плоской и сферической когерентных волн (рис. 222). Положение светлых и темных интерференционных полос на фотопластинке соответствует положению прозрачных и непрозрачных зон Френеля на зонной пластинке. В самом деле, в точках A_1 и A_2 колебания от плоской и сферической волн происходят в одинаковой фазе и дают соседние светлые полосы в интерференционной картине. Расстояния от точек A_1 и A_2 до центра S сферической волны различаются на одну длину волны λ. Но это как раз то условие, которому удовлетворяют соседние прозрачные кольца на зонной пластинке.

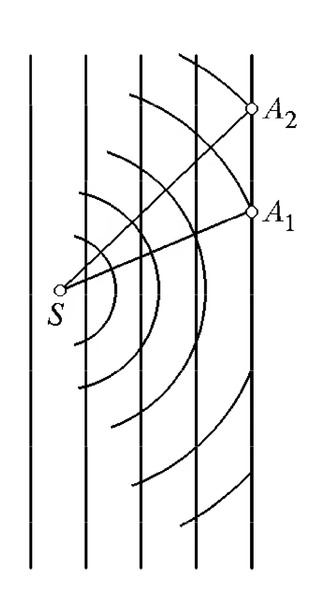


Рис. 222. Фотографическое получение зонной пластинки

Представим себе, что на полученную таким образом фотографию падает только плоская волна, причем точно такая же, как и при фотографировании. Мы уже выяснили, что при этом за пластинкой будут наблюдаться три дифрагировавшие волны: плоская и две сферические. Лучи одной из сферических волн — сходящейся — пересекаются в точке P (рис. 221). Продолжения лучей другой сферической волны — расходящейся — пересекаются в точке P', положение которой совпадает с центром S сферической волны, использованной при фотографировании.

Эта расходящаяся сферическая волна и представляет наибольший интерес для голографии. Будем смотреть на пластинку из такого положения, чтобы в глаз попадала только расходящаяся волна (см. рис. 221). Тогда в глаз придет расходящийся пучок лучей, продолжения которых пересекаются в точке P', и мы увидим сквозь пластинку находящийся в точке P' точечный источник, хотя на самом деле никакого источника там нет!

Голограмма точечного источника света. Полученная описанным способом фотографическая пластинка с зонами Френеля и представляет собой голографическое изображение (голограмму) точечного источника монохроматического света: при дифракции плоской волны на

этой голограмме происходит восстановление сферической волны точечного источника, использовавшегося при получении голограммы. Другими словами, расходящаяся сферическая волна, возникающая при дифракции плоской волны на голограмме, является точной копией волны, создававшейся точечным источником при записи голограммы.

При получении голограммы точки совершенно не обязательно, чтобы эта точка являлась источником света. Достаточно направить на нее свет, когерентный с плоской волной. Тогда голограмма образуется в результате интерференции плоской волны, которую обычно называют *опорной*, и когерентной с ней *предметной* сферической волны, рассеянной облучаемой точкой.

Голограмма сложного объекта. Результаты, полученные для одной точки, легко распространить на предметы любой формы, состоящие из большого числа точек, рассеивающих свет. На голограмме в этом случае получается сложный интерференционный узор, возникающий в результате интерференции опорной волны и всех сферических вторичных волн, рассеянных отдельными точками предме-

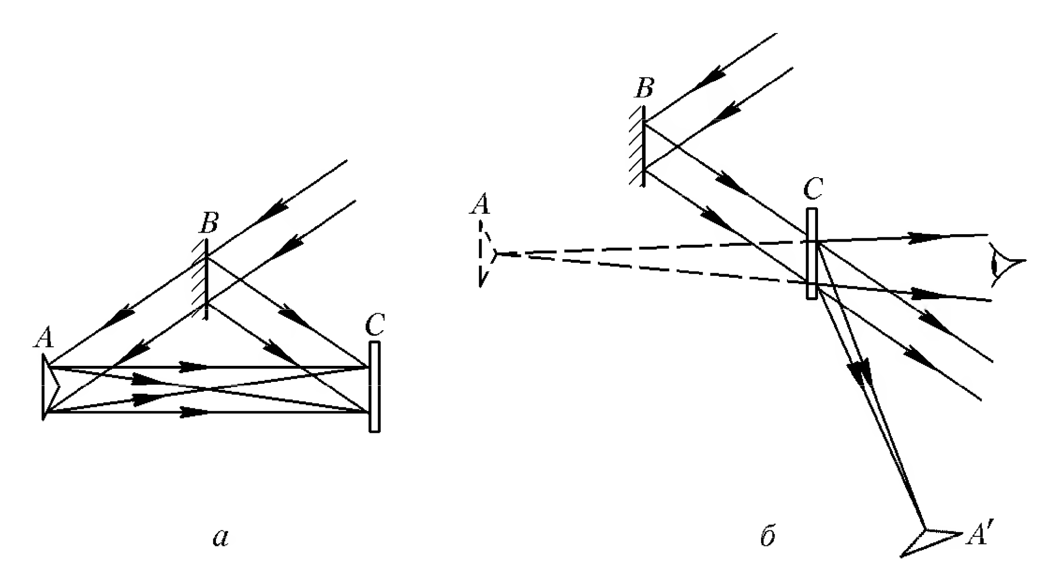


Рис. 223. Схемы получения (*а*) и восстановления (*б*) голограммы протяженного объекта

та. При восстановлении в результате дифракции опорной волны на этом узоре возникают волны, расходящиеся от таких центров, где находились рассеивающие свет точки предмета при записи голограммы.

Схемы получения голограммы протяженного объекта и восстановления с ее помощью рассеянной объектом волны показаны на рис. 223. Плоская монохроматическая волна от лазера падает на полупрозрачную пластинку *B* и разделяется на две когерентные волны (рис. 223*а*). Отраженная от *B* волна падает на фотопластинку *C* и играет роль опорной волны. Прошедшая сквозь *B* волна освещает объект *A*, каждая точка которого становится источником вторичных сферических волн. Рассеянные объектом волны также падают на фотопластинку *C*, где фиксируется результат их интерференции с

опорной волной. Для получения интерференционной картины на фотопластинке необходимо, чтобы время когерентности используемого света было большим: протяженность цуга волн должна быть больше разности хода между опорной волной и волной, рассеянной предметом. Именно поэтому необходимо использовать лазер.

При восстановлении рассеянной волны (рис. 223*б*) на голограмму падает та же опорная волна, которая использовалась при записи. Если расположить глаз (или фотоаппарат) позади голограммы, как указано на рисунке, то, воспринимая пучок расходящихся лучей от дифрагировавшей на голограмме опорной волны, наблюдатель увидит сквозь голограмму объект A в том месте, где он находился при записи голограммы. Разумеется, здесь, как и в рассмотренном выше случае точечного источника, кроме расходящихся волн будут также присутствовать прошедшая без изменения волна и сходящиеся волны, которые дают действительное изображение объекта A'. Использование наклонного падения опорной волны приводит, как видно из рис. 223*б*, к хорошему пространственному разделению всех трех волн, благодаря чему можно сквозь голограмму рассматривать мнимое изображение объекта A без помех со стороны других пучков. В отличие от обычной фотографии, здесь не используются ни линзы, ни другие устройства, формирующие изображения.

Система расходящихся волн, дающая мнимое изображение, почти неотличима от волн, исходящих от самого объекта. Благодаря этому голограмма полностью восстанавливает объемную структуру объекта и передает не только видимое пространственное расположение предметов, но и эффект параллакса, заключающийся в изменении видимого взаимного расположения предметов при перемещении точки наблюдения.

В отличие от обычной фотографии, голограмма содержит информацию об объекте в закодированной форме. Внешне голограмма ничем не напоминает этот объект. На глаз фотопластинка с голограммой представляется равномерно серой, и лишь в микроскоп можно увидеть сложный интерференционный узор. Еще одно отличие от обычной фотографии состоит в том, что для восстановления можно с равным успехом использовать и позитив, и негатив голограммы. Это легко понять, вспомнив, что в зонной пластинке, представляющей голограмму точечного источника, можно сделать непрозрачными или четные, или нечетные зоны Френеля.

Любой участок голограммы содержит информацию обо всем объекте, в то время как различные участки обычной фотографии передают информацию только об отдельных его частях. Действительно, при записи голограммы на любую часть пластинки падают волны, рассеянные всеми частями объекта.

Объем информации, содержащейся на голограмме, значительно больше, чем на фотографии того же объекта. Если объект состоит из нескольких предметов, находящихся на разных расстояниях, то при

фотографировании можно получить четкое изображение, строго говоря, только для одного из них. При восстановлении голограммы такого объекта все предметы будут наблюдаться вполне четкими при соответствующей аккомодации глаза.

- Что такое зонная пластинка Френеля? Объясните фокусирующее действие зонной пластинки.
- Что представляет собой голограмма точечного источника? Как с ее помощью восстанавливается сферическая волна, которую испускал при записи точечный источник?
- Как производится запись голограммы и восстановление предметной волны в случае протяженного предмета? Почему для этого нужен когерентный свет?
- Объясните, почему голограмма дает возможность наблюдать объемные изображения предметов?

§ 36. Геометрическая оптика

Геометрическая оптика использует представление о *световых лучах*, распространяющихся независимо друг от друга, прямолинейных в однородной среде, отражающихся и преломляющихся на границах сред с разными оптическими свойствами. Вдоль лучей происходит перенос энергии световых колебаний.

Показатель преломления среды. Оптические свойства прозрачной среды характеризуются *показателем преломления* n, который определяет скорость v (точнее, фазовую скорость) световых волн:

$$v = c/n, \tag{1}$$

где c — скорость света в вакууме. Показатель преломления воздуха близок к единице ($n_{\text{возд}} = 1{,}0003$), у воды его значение равно 1,33, а у стекла в зависимости от сорта может составлять от 1,5 до 1,95. Особенно велик показатель преломления алмаза — приблизительно 2,5.

Значение показателя преломления, вообще говоря, зависит от длины волны λ (или от частоты ω): $n = n(\lambda)$. Эту зависимость называют *дисперсией света*. Например, у хрусталя (свинцового стекла) показатель преломления плавно меняется от 1,87 для красного света с длиной волны $\lambda_{\text{кр}} = 6{,}6 \cdot 10^{-7}$ м до 1,95 для синего света с $\lambda_{\text{син}} = 4{,}4 \cdot 10^{-7}$ м.

Показатель преломления связан с диэлектрической проницаемостью среды ε (для данной длины волны или частоты) соотношением $n = \sqrt{\varepsilon}$. Среда с большим значением показателя преломления называется оптически более плотной.

Законы геометрической оптики. Поведение световых лучей подчиняется основным законам геометрической оптики.

1. В однородной среде световые лучи прямолинейны (закон прямолинейного распространения света).

2. На границе двух сред (или на границе среды с вакуумом) возникает отраженный луч, лежащий в плоскости, образуемой падающим лучом и нормалью к границе, т. е. в плоскости падения, причем угол отражения φ_1 равен углу падения φ (рис. 224):

$$\varphi_1 = \varphi \tag{2}$$

(*закон отражения света*).

3. Преломленный луч лежит в плоскости падения (при падении света на границу изотропной среды) и образует с нормалью к границе угол φ_2 (угол преломления), определяемый соотношением

$$n_1 \sin \varphi_1 = n_2 \sin \varphi_2$$

или

$$\frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2} \tag{3}$$

(*закон преломления света* или закон Снеллиуса).

При переходе света в оптически более плотную среду ($n_2 > n_1$) луч приближается к нормали ($\varphi_2 < \varphi_1$). Отношение $n_2/n_1 = n_{21}$ называют относительным показателем преломления двух сред (или

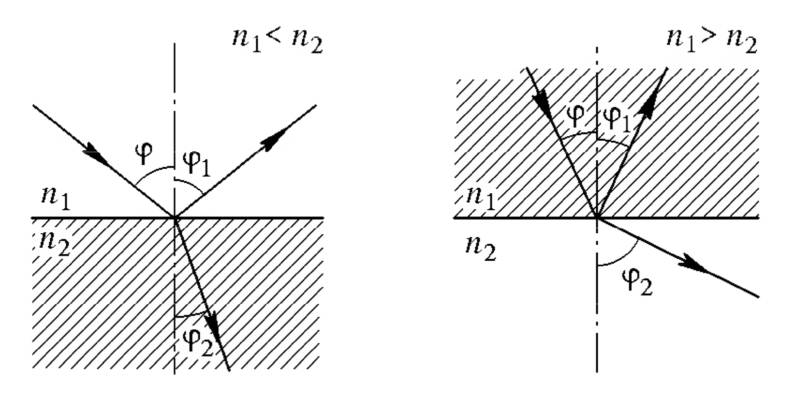


Рис. 224. Отражение и преломление света на плоской границе двух сред

показателем преломления второй среды относительно первой). При падении света из вакуума на границу среды с показателем преломления n закон преломления принимает вид

$$\frac{\sin \varphi_1}{\sin \varphi_2} = n. \tag{4}$$

Для воздуха показатель преломления близок к единице ($n_{\text{возд}} = 1{,}0003$), поэтому и при падении света из воздуха на некоторую среду можно пользоваться формулой (4).

При переходе света в оптически менее плотную среду ($n_2 < n_1$) угол падения не может превышать предельного значения $\varphi_{\text{пр}}$, так как угол преломления φ_2 не может превышать $\pi/2$ (рис. 225):

$$\sin \varphi_{\text{пр}} = n_2/n_1 \quad (n_2 < n_1). \tag{5}$$

Если угол падения $\varphi > \varphi_{пр}$, происходит полное отражение, т. е. вся энергия падающего света возвращается в первую, оптически более плотную, среду. Для границы стекло — воздух ($n_1/n_2 = 1{,}5$) $\varphi_{пр} = 41°50'$.

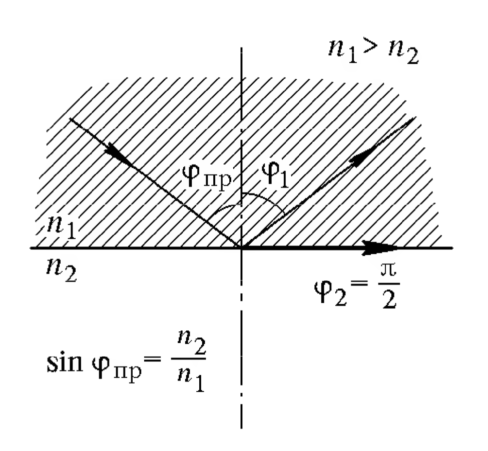


Рис. 225. Предельный угол полного отражения

Принцип Гюйгенса и законы геометрической оптики. Законы геометрической оптики были установлены задолго до выяснения природы света. Эти законы могут быть выведены из волновой теории на основе принципа Гюйгенса. Их применимость ограничена явлениями дифракции.

Остановимся подробнее на переходе от волновых представлений о распространении света к представлениям геометрической оптики. С помощью принципа Гюйгенса по заданной волновой поверхности падающей волны можно построить волновые поверхности преломленной и отраженной волн. При этом следует учесть, что световые лучи перпендикулярны волновым поверхностям.

Рассмотрим плоскую световую волну, падающую из среды *1* (с показателем преломления n_1) на плоскую границу раздела со средой *2* (с показателем преломления n_2) под углом φ (рис. 226). Угол падения φ — это угол между падающим лучом и нормалью к границе раздела. В то же время φ — это угол между границей раздела и волновой поверхностью падающей волны. Пусть в некоторый момент эта волновая поверхность занимает положение AC. Спустя время $t = CB/v_1$ она достигнет точки B границы раздела. За это же время вторичная волна из точки A, распространяющаяся в среде *1*, расширится до радиуса $AE = v_1 t$. Подставляя сюда t, получаем $AE = CB$. Отсюда ясно, что волновая поверхность EB отраженной волны, представляющая собой огибающую всех вторичных сферических волн с центрами на отрезке AB, наклонена к границе раздела на угол φ_1, который равен φ (равенство углов φ_1 и φ следует из равенства прямоугольных треугольников ABE и ABC, имеющих общую гипотенузу AB и равные катеты AE и CB). Таким образом, отраженный луч AE, перпендикулярный фронту отраженной волны, образует с нормалью угол φ_1, равный углу падения φ.

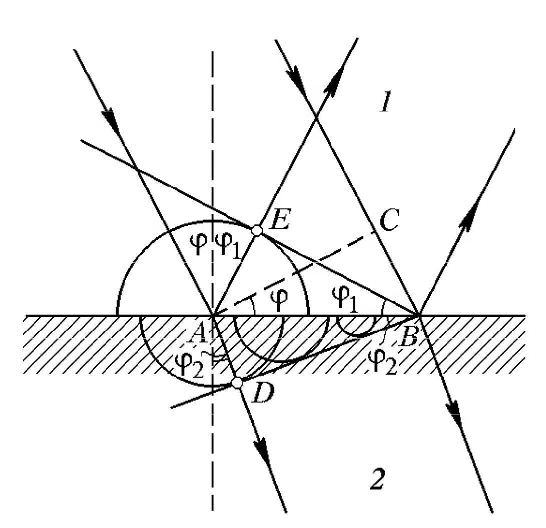


Рис. 226. Построение Гюйгенса для отражения и преломления света

Аналогично из этого построения Гюйгенса можно получить и закон преломления. В среде *2* вторичные волны распространяются со скоростью v_2, и поэтому выходящая из точки A сферическая волна спустя время t имеет радиус $AD = v_2 t$. Подставляя сюда $t = CB/v_1$, находим $AD = v_2 \cdot CB/v_1$. Разделив обе части этого равенства на AB, приходим к соотношению

$$\sin \varphi_2 = \frac{v_2}{v_1} \sin \varphi, \tag{6}$$

которое, очевидно, совпадает с законом преломления (3), так как угол φ_2 наклона волновой поверхности волны в среде *2* есть в то же время и угол между преломленным лучом и нормалью к границе раздела (угол преломления, рис. 226).

Отражение и преломление на искривленной поверхности. Плоская волна характеризуется тем свойством, что ее волновые поверхности представляют собой неограниченные плоскости, а направление ее распространения и амплитуда везде одинаковы. Часто электромагнитные волны, не являющиеся плоскими, можно приближенно рассматривать как плоские на небольшом участке пространства. Для этого необходимо, чтобы амплитуда и направление распространения волны почти не менялись на протяжении расстояний порядка длины волны. Тогда также можно ввести понятие лучей, т. е. линий, касательная к которым в каждой точке совпадает с направлением распространения волны. Если при этом граница раздела двух сред, например поверхность линзы, может считаться приблизительно плоской на расстояниях порядка длины волны, то поведение лучей света на такой границе будет описываться теми же законами отражения и преломления.

Изучение законов распространения световых волн в этом случае составляет предмет геометрической оптики, поскольку в этом приближении оптические законы можно сформулировать на языке геометрии. Многие оптические явления, такие, как, например, прохождение света через оптические системы, формирующие изображение, можно рассматривать исходя из представления о световых лучах, совершенно отвлекаясь от волновой природы света. Поэтому представления геометрической оптики справедливы лишь в той степени, в какой можно пренебречь явлениями дифракции световых волн. Дифракция сказывается тем слабее, чем меньше длина волны. Это значит, что геометрическая оптика соответствует предельному случаю малых длин волн: $\lambda \to 0$.

Физическую модель пучка световых лучей можно получить, если пропустить свет от источника пренебрежимо малого размера через небольшое отверстие в непрозрачном экране. Выходящий из отверстия свет заполняет некоторую область, и если длина волны пренебрежимо мала по сравнению с размерами отверстия, то на небольшом расстоянии от него можно говорить о пучке световых лучей с резкой границей.

Интенсивность отраженного и преломленного света. Законы отражения и преломления позволяют определить только направление соответствующих световых лучей, но ничего не говорят об их интенсивности. Между тем опыт показывает, что соотношение интенсивностей отраженного и преломленного лучей, на которые расщепляется исходный луч на границе раздела, сильно зависит от угла падения. Например, при нормальном падении света на поверхность стекла отражается около 4% энергии падающего светового пучка, а при падении на поверхность воды — только 2%. Но при скользящем падении поверхности стекла и воды отражают почти все падающее излучение. Благодаря этому мы можем любоваться зеркальными отражениями берегов в спокойной прозрачной воде горных озер.

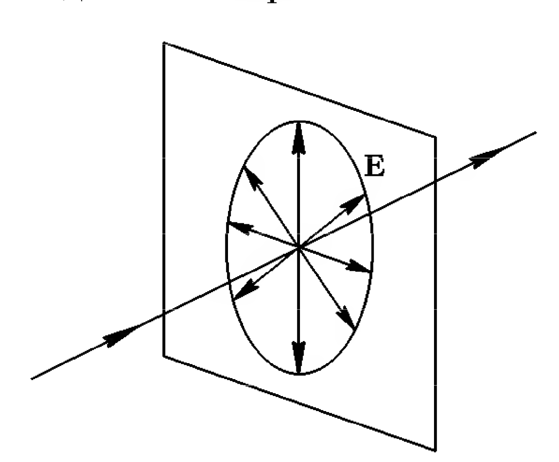


Рис. 227. У естественного света колебания вектора **E** происходят во всевозможных направлениях в плоскости, перпендикулярной лучу

Естественный свет. Световая волна, как и любая электромагнитная волна, поперечна: вектор **E** лежит в плоскости, перпендикулярной направлению распространения. Испускаемый обычными источниками (например, раскаленными телами) свет неполяризован. Это значит, что в световом луче колебания вектора **E** происходят во всевозможных направлениях в плоскости, перпендикулярной направлению луча (рис. 227). Такой неполяризованный свет называется *естественным*. Его можно представить как некогерентную смесь двух световых волн одинаковой интенсивности, линейно поляризованных в двух взаимно перпендикулярных направлениях. Эти направления можно выбрать произвольно.

Поляризация света при отражении. При изучении отражения неполяризованного света от границы раздела сред удобно выбрать одно из двух независимых направлений вектора **E** в плоскости падения, а второе — перпендикулярно ей. Условия отражения этих двух волн оказываются различными: волна, у которой вектор **E** перпендикулярен плоскости падения (т. е. параллелен границе раздела) при всех углах падения (кроме 0 и 90°), отражается сильнее. Поэтому отраженный свет оказывается частично поляризованным, а при отражении под некоторым определенным углом (для стекла около 56°) — полностью поляризованным.

Этим обстоятельством пользуются для устранения бликов, например при фотографировании пейзажа с водной поверхностью. Подбирая должным образом ориентацию поляризационного светофильтра, пропускающего световые колебания только определенной поляризации, можно практически полностью устранить блики на фотографии.

Принцип Ферма. Основные законы геометрической оптики — закон прямолинейного распространения света в однородной среде, законы отражения и преломления света на границе раздела двух сред — могут быть получены с помощью *принципа Ферма.* Согласно этому принципу действительный путь распространения монохроматического луча света есть путь, для прохождения которого свету требуется экстремальное (как правило, минимальное) время по сравнению с любым другим близким к нему мыслимым путем между теми же точками.

Возьмем для примера закон отражения света. Сразу видно, что он непосредственно следует из принципа Ферма. Пусть луч света, вышедшего из точки A, отражается от зеркала в некоторой точке C и приходит в заданную точку B (рис. 228). Согласно принципу Ферма, проходимый светом путь ACB должен быть короче любого другого пути по близкой траектории, например ADB. Чтобы найти положение точки отражения C, отложим на опущенном из точки A перпендикуляре к зеркалу отрезок OA', равный OA, и соединим точки A' и B отрезком прямой. Пересечение этого отрезка с поверхностью зеркала и дает положение точки C. Действительно, легко видеть, что $A'C = AC$, и потому путь света ACB из точки A в точку B равен отрезку $A'B$. Путь света из A в B через любую другую точку D, равный $A'DB$, будет длиннее, так как прямая $A'B$ — это кратчайшее расстояние между двумя точками A' и B. Из рис. 228 сразу видно, что именно такое положение точки C соответствует равенству углов падения и отражения: $\varphi_1 = \varphi$.

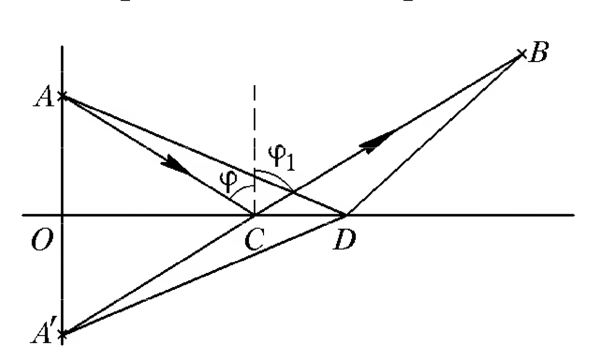


Рис. 228. К выводу закона отражения света из принципа Ферма

Изображение в плоском зеркале. Точка A', расположенная симметрично точке A относительно поверхности плоского зеркала, представляет собой изображение точки A в этом зеркале. В самом деле, узкий пучок лучей, выходящих из A, отражающихся в зеркале и попадающих в глаз наблюдателя (рис. 229), будет казаться выходящим из точки A'. Создаваемое плоским зеркалом изображение называется *мнимым*, так как в точке A' пересекаются не сами отраженные лучи, а их продолжения назад. Очевидно, что изображение протяженного предмета в плоском зеркале будет равным по размерам самому предмету.

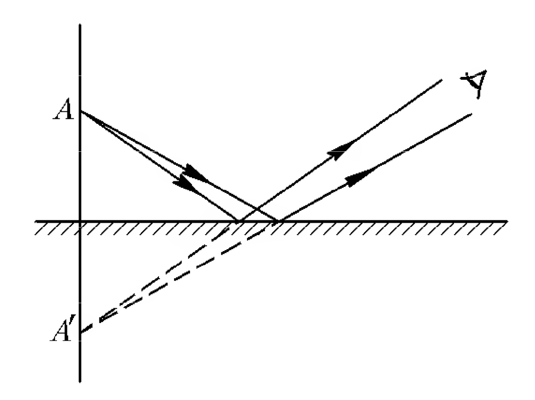


Рис. 229. Мнимое изображение точки A в плоском зеркале

- Что такое световые лучи? Как это понятие соотносится с понятием волновой поверхности? Какое отношение имеют лучи к направлению распространения световых колебаний?
- В каких условиях можно использовать представление о световых лучах?
- Что такое показатель преломления среды? Как он связан со скоростью распространения света?
- Сформулируйте основные законы геометрической оптики. Что такое плоскость падения? Объясните на основе соображений симметрии, почему луч как при отражении, так и при преломлении не выходит из этой плоскости.
- При каких условиях отражение света на границе раздела будет полным? Что такое предельный угол полного отражения?
- Поясните, как можно получить законы прямолинейного распространения, отражения и преломления на основе принципа Гюйгенса.
- Почему законы отражения и преломления света, сформулированные для плоской границы раздела, можно применять и в случае искривленных поверхностей (линзы, капли воды и др.)?
- Приведите примеры наблюдавшихся вами явлений, свидетельствующих о зависимости интенсивности отраженного света от угла падения.
- Почему при отражении естественного света получается частично поляризованный свет?
- Сформулируйте принцип Ферма и покажите, что из него следует закон отражения света.
- Докажите, что изображение предмета в плоском зеркале равно по размерам самому предмету.

△ **Принцип Ферма и формула линзы.** Скорость света в среде с показателем преломления n равна c/n. Поэтому принцип Ферма можно сформулировать как требование минимальности *оптической длины* луча при распространении света между двумя заданными точками. Под оптической длиной луча понимается произведение показателя преломления на длину пути луча. В неоднородной среде оптическая длина складывается из оптических длин на отдельных участках. Использование этого принципа позволяет рассмотреть некоторые задачи с несколько иной точки зрения, чем при непосредственном применении законов отражения и преломления. Например, при рассмотрении фокусирующей оптической системы вместо применения закона преломления можно просто потребовать равенства оптических длин всех лучей.

Получим с помощью принципа Ферма формулу тонкой линзы, не прибегая к закону преломления. Для определенности будем рассматривать двояковыпуклую линзу со сферическими преломляющими поверхностями, радиусы кривизны которых равны R_1 и R_2 (рис. 230).

Хорошо известно, что с помощью собирающей линзы можно получить действительное изображение точки. Пусть S_1 — предмет, S_2 — его изображение. Все лучи, исходящие из S_1 и прошедшие через линзу, собираются в одной точке S_2. Пусть S_1 лежит на главной оптической оси линзы, тогда изображение S_2 также лежит на оси. Что значит получить формулу линзы? Это значит установить связь между расстояниями d от предмета до линзы и f от линзы до изображения и величинами, характеризующими данную линзу: радиусами кривизны ее поверхностей R_1 и R_2 и показателем преломления n.

Из принципа Ферма следует, что оптические длины всех лучей, выходящих из источника и собирающихся в точке, являющейся его изображением, одинаковы. Рассмотрим два из этих лучей: один, идущий вдоль оптической оси, второй — через край

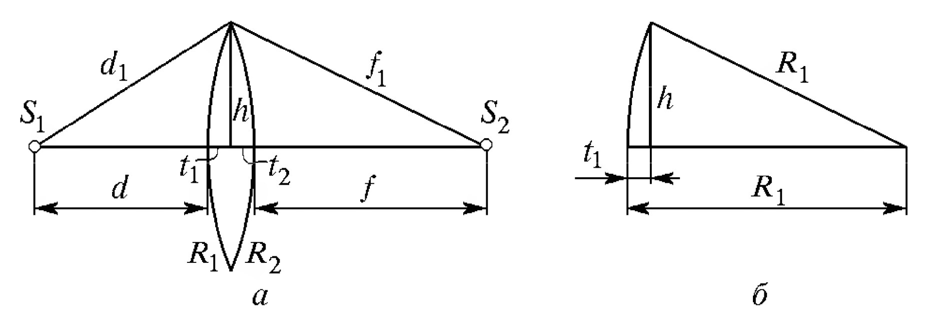


Рис. 230. К выводу формулы тонкой линзы

линзы (рис. 230*а*). Несмотря на то, что второй луч проходит большее расстояние, его путь в стекле короче, чем у первого, так что время распространения света от S_1 до S_2 для них одинаково. Выразим это математически. Обозначения величин всех отрезков указаны на рисунке. Приравняем оптические длины первого и второго лучей:

$$d + n(t_1 + t_2) + f = d_1 + f_1. \tag{7}$$

Выразим d_1 по теореме Пифагора:

$$d_1 = \sqrt{(d + t_1)^2 + h^2} = (d + t_1)\sqrt{1 + \frac{h^2}{(d+t_1)^2}}.$$

Теперь воспользуемся приближенной формулой $\sqrt{1+x} \approx \approx 1 + x/2$, которая справедлива при $x \ll 1$ с точностью до членов порядка x^2. Считая h малым по сравнению с d, с точностью до членов порядка $(h/d)^4$ имеем

$$d_1 \approx d + t_1 + \frac{1}{2}\frac{h^2}{d+t_1}. \tag{8}$$

Аналогично для f_1 получаем

$$f_1 \approx f + t_2 + \frac{1}{2}\frac{h^2}{f+t_2}. \tag{9}$$

Подставляем выражения (8) и (9) в основное соотношение (7) и приводим подобные члены:

$$(n-1)\,(t_1+t_2)=\frac{h^2}{2}\left(\frac{1}{d+t_1}+\frac{1}{f+t_2}\right). \qquad (10)$$

В этой формуле в случае тонкой линзы можно пренебречь величинами t_1 и t_2 в знаменателях правой части по сравнению с d и f; очевидно, что в левой части выражения (10) t_1+t_2 следует сохранить, ибо этот член стоит множителем.

С той же точностью, что и в формулах (8) и (9), t_1 и t_2 с помощью теоремы Пифагора можно представить в виде (рис. 230*б*)

$$t_1=R_1-\sqrt{R_1^2-h^2}\approx\frac{h^2}{2R_1},\qquad t_2\approx\frac{h^2}{2R_2}.$$

Теперь остается только подставить эти выражения в левую часть формулы (10) и сократить обе части равенства на $h^2/2$:

$$(n-1)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right)=\frac{1}{d}+\frac{1}{f}.$$

Это и есть искомая формула тонкой линзы. Вводя обозначение

$$\frac{1}{F}=(n-1)\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right), \qquad (11)$$

ее можно переписать в виде

$$\frac{1}{d}+\frac{1}{f}=\frac{1}{F}. \qquad (12)$$

Фокусное расстояние линзы. Из формулы (12) нетрудно понять, что F есть фокусное расстояние линзы: если источник находится на бесконечности (т. е. на линзу падает параллельный пучок лучей), его изображение находится в фокусе. Полагая $d\to\infty$, получаем $f\to F$.

Аберрации. Полученное свойство фокусировки параллельного пучка монохроматических лучей является, как видно из проделанного вывода, приближенным и справедливо лишь для узкого пучка, т. е. для лучей, не слишком сильно отстоящих от оптической оси. Для широких пучков лучей имеет место сферическая аберрация, проявляющаяся в том, что далекие от оптической оси лучи пересекают ее не в фокусе (рис. 231). В результате изображение бесконечно удаленного точечного источника, создаваемое широким пучком лучей, преломленных линзой, оказывается несколько размытым.

Кроме сферической аберрации, линза как оптический прибор, формирующий изображение, обладает рядом других недостатков.

Например, даже узкий параллельный пучок монохроматических лучей, образующий некоторый угол с оптической осью линзы, после преломления не собирается в одну точку. При использовании немонохроматического света у линзы проявляется еще и хроматическая аберрация, связанная с тем, что показатель преломления n зависит от длины волны. В результате, как видно из формулы (11), узкий параллельный пучок лучей белого света пересекается после преломления в линзе не в одной точке: лучи каждого цвета имеют свой фокус.

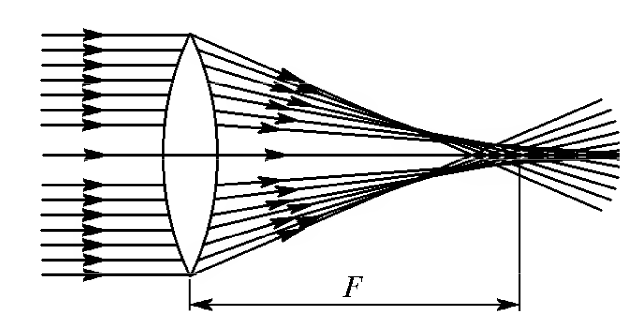


Рис. 231. Сферическая аберрация линзы

При конструировании оптических приборов удается в большей или меньшей степени устранить эти недостатки путем применения специально рассчитанных сложных многолинзовых систем. Однако одновременно устранить все недостатки невозможно. Поэтому приходится идти на компромисс и, рассчитывая оптические приборы, предназначенные для определенной цели, добиваться устранения одних недостатков и мириться с присутствием других. Например, объективы, предназначенные для наблюдения объектов малой яркости, должны пропускать возможно больше света, что вынуждает мириться с некоторыми аберрациями, неизбежными при использовании широких пучков света.

Для объективов телескопов, где изучаемыми объектами являются звезды — точечные источники, расположенные вблизи оптической оси прибора, особенно важно устранить сферическую и хроматическую аберрацию для широких пучков, параллельных оптической оси. Устранить хроматическую аберрацию проще всего путем использования в оптической системе отражения вместо преломления. Так как лучи всех длин волн отражаются одинаково, то телескоп-рефлектор, в отличие от рефрактора, полностью лишен хроматической аберрации. Если при этом еще надлежащим образом выбрать форму поверхности отражающего зеркала, то можно полностью избавиться и от сферической аберрации для пучков, параллельных оптической оси. Для получения точечного осевого изображения зеркало должно быть параболическим.

Покажем это. Пусть плоская волна, т. е. пучок лучей, параллельных оси y, падает на зеркальную поверхность, обладающую тем свойством, что после отражения все лучи собираются в одной точке F (рис. 232). Из симметрии ясно, что искомая поверхность зеркала представляет собой поверхность вращения вокруг оси y, поэтому достаточно рассмотреть сечение этой поверхности плоскостью xy, т. е. кривую $y = y(x)$. Рассмотрим центральный луч и луч, падающий на зеркало в произвольной точке C с координатами x и y. На основании принципа Ферма оптическая длина

этих лучей от произвольной волновой поверхности AB до фокуса F должна быть одной и той же:

$$BC + CF = AO + OF. \qquad (13)$$

Из рис. 232 видно, что $AO = BC + y$, а $CF = \sqrt{x^2 + (F - y)^2}$. Подставляя эти значения в (13), получим

$$\sqrt{x^2 + (F - y)^2} = y + F.$$

Возводя обе части в квадрат и приводя подобные члены, найдем

$$y = \frac{1}{4F} x^2. \qquad (14)$$

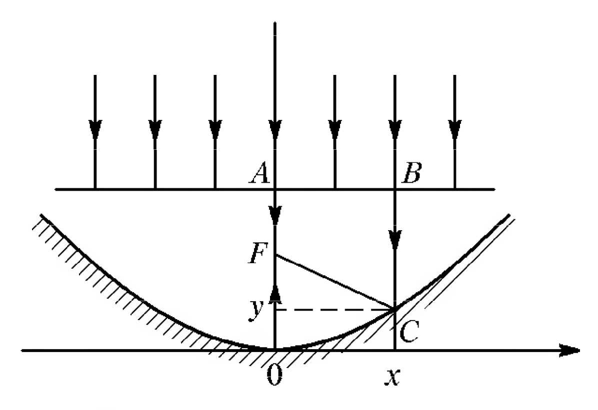


Рис. 232. Все параллельные лучи после отражения от параболического зеркала собираются в точке F

Это уравнение параболы.

Параболические зеркала используются во всех крупнейших телескопах. В этих телескопах устранены сферическая и хроматическая аберрации; однако параллельные пучки, идущие даже под небольшими углами к оптической оси, после отражения не пересекаются в одной точке и дают сильно искаженные внеосевые изображения. Поэтому пригодное для работы поле зрения оказывается очень небольшим, порядка нескольких десятков угловых минут. ▲

- Поясните, почему применительно к фокусирующей оптической системе принцип Ферма формулируется как условие равенства оптических длин всех лучей от точки предмета до ее изображения.
- Выведите с помощью принципа Ферма закон преломления света на границе раздела двух сред.
- Сформулируйте приближения, при выполнении которых справедлива формула тонкой линзы.
- В чем проявляются сферическая и хроматическая аберрации линзы?
- Какие преимущества и какие недостатки имеет параболическое зеркало по сравнению со сферическим?
- Покажите, что эллиптическое зеркало отражает все лучи, вышедшие из одного фокуса эллипсоида, в другой фокус.

§ 37. Оптические приборы, формирующие изображение

Геометрическая оптика объясняет многие простые оптические явления, такие, как возникновение теней и образование изображений в оптических приборах. Она позволяет сравнительно просто рассмотреть прохождение света через любую оптическую систему и дает

возможность простыми средствами решать широкий круг практически важных задач.

Однако для решения более тонких вопросов, таких, как распределение света вблизи фокуса или разрешающая способность оптических инструментов, требуется выход за рамки геометрической оптики и учет волновой природы света. Как уже отмечалось в § 33, изображение удаленной звезды в фокальной плоскости объектива телескопа представляет собой не точку, а дифракционное пятно.

Геометрическая оптика и волновые свойства света. По представлениям геометрической оптики изображение точки предмета — это пересечение пучка лучей. Однако вблизи этой точки пересечения искривление волновой поверхности становится настолько существенным, что ее уже нельзя считать плоской на расстояниях порядка длины волны. Вблизи таких точек условия применимости геометрической оптики заведомо не выполняются: световой поток нельзя собрать в одну точку, ибо это привело бы к бесконечно большой освещенности, чего на самом деле не бывает.

Камера-обскура. В какой мере волновые свойства света искажают предсказываемую геометрической оптикой картину, можно увидеть на примере простейшего оптического прибора — *камеры-обскуры.*

Устройство камеры-обскуры схематически показано на рис. 233. Она представляет собой ящик, в одной из стенок которого сделано малое отверстие. Действие камеры-обскуры, как и существование резких теней от непрозрачных предметов при малом источнике света, — это факты, указывающие на прямолинейное распространение света в однородной среде.

Однако основной закон геометрической оптики — прямолинейное распространение света — справедлив лишь для широких, строго говоря, неограниченных световых пучков. Всякое ограничение ширины светового пучка, неизбежное в любом оптическом приборе, обязательно приводит к отступлениям от геометрической оптики и к проявлениям волновых свойств света.

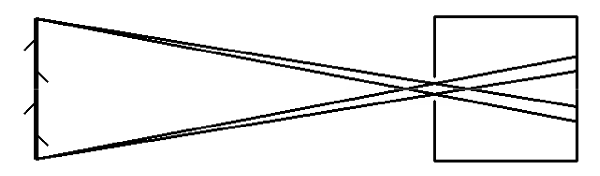


Рис. 233. Схема камеры-обскуры

Выбор оптимального диаметра отверстия для получения на экране наиболее резкого изображения удаленных предметов это поиск определенного компромисса между волновой и геометрической оптикой. Если бы свет действительно подчинялся законам геометрической оптики, то задача была бы тривиальной: чем меньше отверстие, тем резче изображение. В самом деле, удаленный предмет можно мысленно разбить на отдельные элементы и каждый элемент рассматривать как точечный источник. Отверстие в передней стенке камеры вырезает пучок лучей от источника, попадающих на экран. Пучок лучей от удаленной светя-

щейся точки можно считать параллельным; поэтому размер пятна на экране, которое мы рассматриваем как изображение этой точки, определяется размером отверстия. При оценке размер пятна можно считать равным размеру отверстия.

Но уменьшать отверстие беспредельно нельзя не только потому, что при этом уменьшается световой поток и, следовательно, освещенность изображения, но и потому, что рано или поздно начнет сказываться волновая природа света. Дифракция света на отверстии приводит к размыванию изображения. Если уменьшать отверстие до размеров, сравнимых с длиной волны света, то изображение исчезает совсем и экран становится практически равномерно освещенным.

Оценим размер дифракционного пятна на экране, которое можно рассматривать как изображение удаленного точечного источника, в тех случаях, когда необходимо пользоваться волновой оптикой. Это можно сделать точно так же, как в § 33, где оценивались размеры дифракционного изображения звезды в телескопе. Согласно формуле (1) § 33, для угла дифракции θ, т. е. направления на край центрального дифракционного пятна, имеем

$$\theta = \lambda/d,$$

где d — диаметр отверстия камеры-обскуры. Этот угол определяет линейный размер a дифракционного пятна на экране камеры-обскуры. Если расстояние от отверстия до экрана равно L, то

$$a \approx 2L\theta = 2\,\frac{\lambda}{d}\,L.$$

Очевидно, что уменьшать размер отверстия следует только до тех пор, пока размер дифракционного пятна не сравняется с размером изображения, получающегося в приближении геометрической оптики. Дальнейшее уменьшение отверстия приведет только к размыванию изображения, т. е. к ухудшению резкости.

Итак, наилучшая резкость изображения достигается при равенстве диаметра отверстия и размера дифракционного пятна a:

$$d \approx 2\,\frac{\lambda}{d}\,L, \quad \text{откуда} \quad d \approx \sqrt{2\lambda L}.$$

При $L = 25$ см для видимого света ($\lambda \approx 5\cdot 10^{-5}$ см) оптимальный размер отверстия равен 0,5 мм.

Гомоцентрические и астигматические пучки лучей. При изображении предметов в оптических приборах по правилам геометрической оптики следует иметь в виду, что размытие и искажения возникают не только из-за дифракции. В первую очередь это связано с нарушением гомоцентричности пучков лучей. *Гомоцентрическим* называется пучок лучей, проходящих через одну точку (рис. 234). Все пучки, выходящие из отдельных точек предмета, до попадания в оптическую систему являются гомоцентрическими.

При отражении в плоском зеркале лучи изменяют направление, но гомоцентричность пучков сохраняется. Наблюдателю кажется, что отраженные от зеркала лучи выходят из одной точки A', расположенной за зеркалом симметрично точке A.

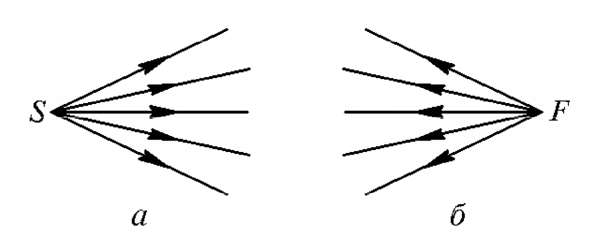


Рис. 234. Расходящийся (*а*) и сходящийся (*б*) гомоцентрические пучки

После прохождения через оптическую систему свойство гомоцентричности пучки, как правило, утрачивают. Так происходит даже при преломлении света на плоской границе раздела двух сред. В результате пучок становится *астигматическим*. В астигматических пучках (рис. 235) лучи, лежащие в двух взаимно перпендикулярных осевых сечениях, пересекаются в разных местах — по двум отрезкам, смещенным вдоль пучка на некоторое расстояние. Ортогональные к лучам волновые поверхности астигматического пучка имеют двойную кривизну (различные радиусы R_1 и R_2 на рис. 235) в отличие от гомоцентрических пучков со сферическими волновыми поверхностями. Хотя, строго говоря, при прохождении через оптическую систему свойство гомоцентричности пучков утрачивается, оно приближенно сохраняется в важном для практики случае пучков параксиальных лучей в центрированных оптических системах, т. е. в системах, образованных сферическими преломляющими и отражающими поверхностями, центры которых лежат на одной прямой, называемой оптической осью. Пучки лучей называют *параксиальными*, если лучи образуют малые углы с оптической осью и пересекают поверхности на расстояниях от оси, малых по сравнению с радиусами кривизны поверхностей. Проходя через оптическую систему, параксиальные пучки от разных точек предмета формируют его оптическое изображение, так что каждой точке S предмета соответствует определенная точка S' изображения (рис. 236).

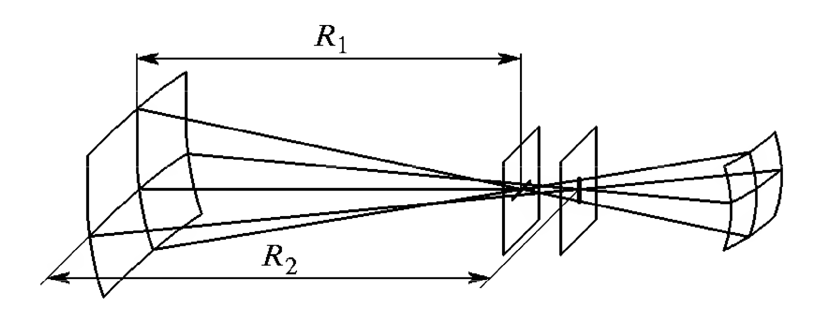


Рис. 235. Астигматический пучок лучей

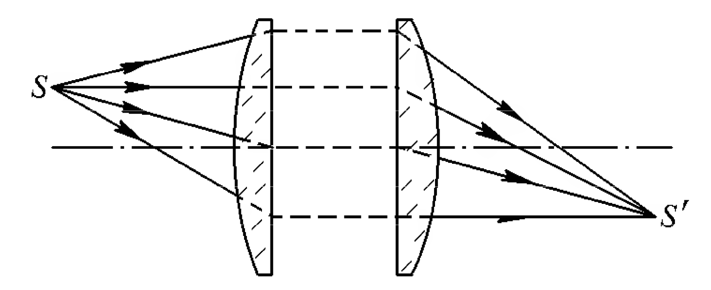


Рис. 236. Образование изображения в оптической системе

Сферическое зеркало. Падающий на вогнутое сферическое зеркало параллельный пучок лучей после отражения собирается в фокусе F (рис. 237*а*). Фокус находится в середине отрезка OP, соединяющего центр O поверхности зеркала — оптический центр — и вершину P зеркала — полюс. Фокусное расстояние зеркала $F = R/2$, где R — радиус кривизны зеркала.

Для построения изображения произвольной точки A в сферическом зеркале удобно использовать следующие лучи (рис. 237*б*):

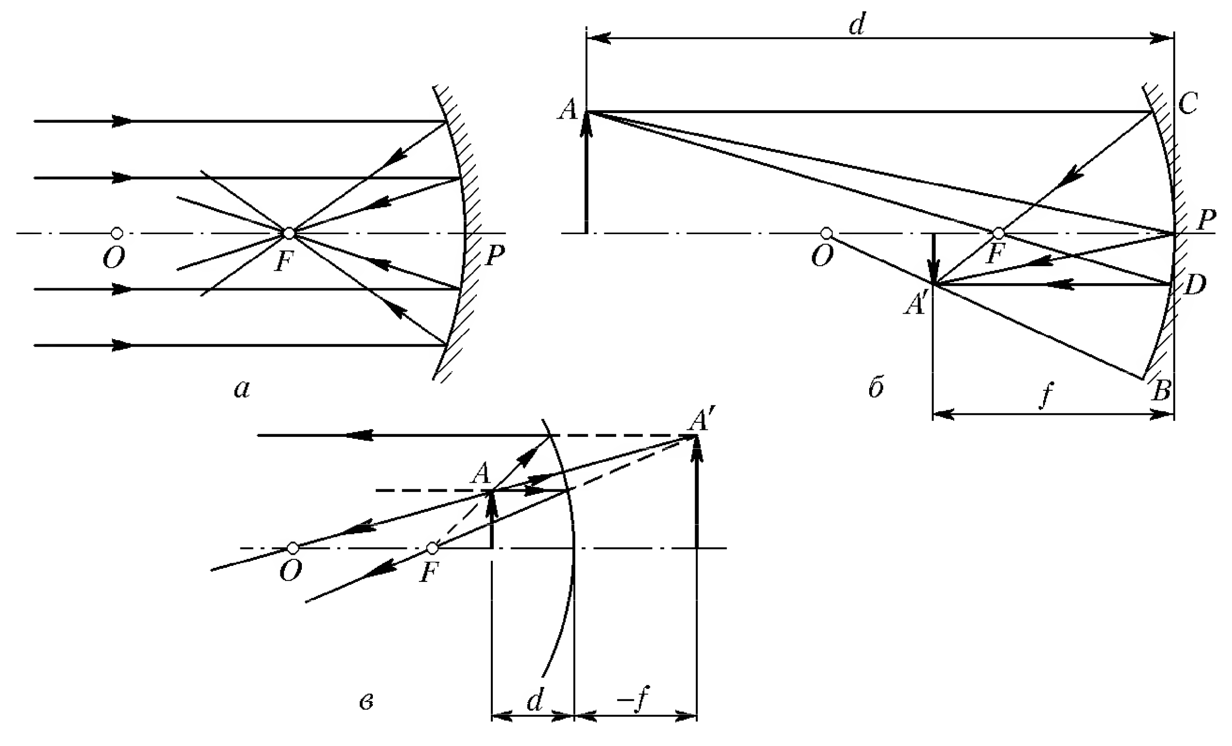


Рис. 237. Вогнутое зеркало

1) луч AOB, проходящий через оптический центр O; отраженный луч идет вдоль той же прямой назад;

2) луч AFD, проходящий через фокус F; отраженный луч параллелен оптической оси;

3) луч AC, параллельный оптической оси; отраженный луч проходит через фокус F;

4) луч AP, падающий на полюс зеркала; отраженный луч симметричен падающему относительно оптической оси OP.

Расстояние d от предмета до зеркала и расстояние f от зеркала до изображения связаны с фокусным расстоянием $F = R/2$ соотношением

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}, \tag{1}$$

которое называется формулой сферического зеркала.

Когда предмет находится на расстояниях от ∞ до F, изображение действительное перевернутое. Изображение предмета, расположенного ближе фокуса, мнимое прямое увеличенное. Оно находится за зеркалом (рис. 237*в*). Формула (1) справедлива и в этом случае, если в ней расстояние f до мнимого изображения полагать отрицательным ($f < 0$).

Падающий на выпуклое зеркало параллельный пучок лучей отражается так, будто все лучи выходят из фокуса F (рис. 238), находящегося за зеркалом на расстоянии $R/2$. При любом расположении предмета его изображение в выпуклом зеркале мнимое прямое уменьшенное и находится за зеркалом (ближе фокуса).

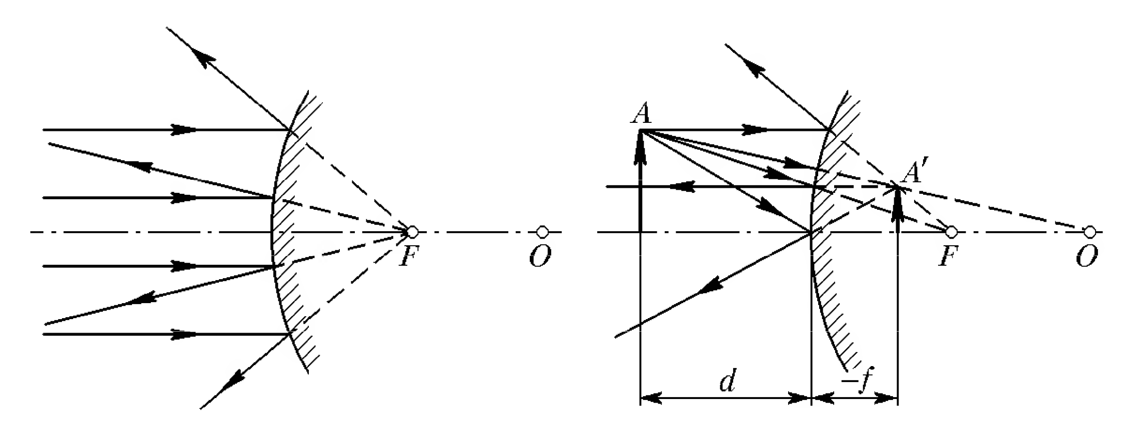


Рис. 238. Выпуклое зеркало

Для построения изображения используют лучи, аналогичные перечисленным для вогнутого зеркала. Формула (1) справедлива и для выпуклого зеркала, если его фокусное расстояние полагать отрицательным ($F = -R/2$).

Подчеркнем еще раз, что сформулированные правила построения изображений справедливы только для параксиальных лучей. В широком пучке три луча, образующие значительные углы друг с другом, не пересекаются в одной точке.

Линзы. *Главной оптической осью* линзы называют прямую, проходящую через центры кривизны сферических поверхностей, ограничивающих линзу. Собирающие линзы в середине толще, чем по краям, рассеивающие — наоборот, в середине тоньше (рис. 239), когда показатель преломления материала линзы больше, чем окружающей среды. Линзу называют тонкой, когда ее толщина пренебрежимо мала по сравнению с радиусами кривизны ее поверхностей и с расстоянием от предмета до линзы. При этом точки пересечения сферических поверхностей линзы с оптической осью (рис. 240*а*) расположены настолько близко, что их принимают за одну точку O, называемую оптическим центром линзы.

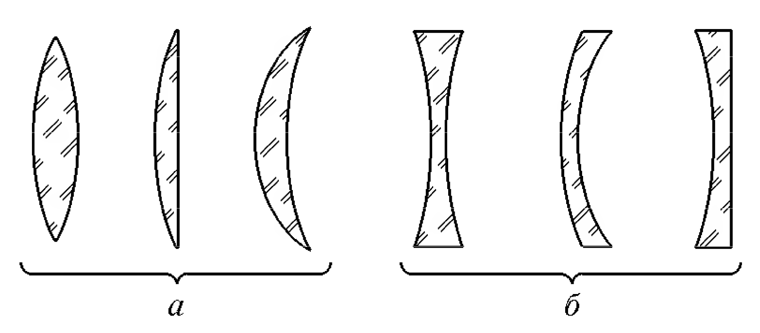


Рис. 239. Собирающие (*а*) и рассеивающие (*б*) линзы

Падающий на собирающую линзу пучок лучей, параллельных оптической оси, собирается в фокусе линзы F (рис. 240*а*). Фокусное расстояние линзы F зависит от радиусов кривизны R_1 и R_2 ее прелом-

ляющих поверхностей и показателя преломления n материала линзы. Для двояковыпуклой линзы F рассчитывается по формуле

$$\frac{1}{F} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right). \qquad (2)$$

Предполагается, что линза находится в среде с показателем преломления, равным единице (вакуум, воздух). Если одна из по-

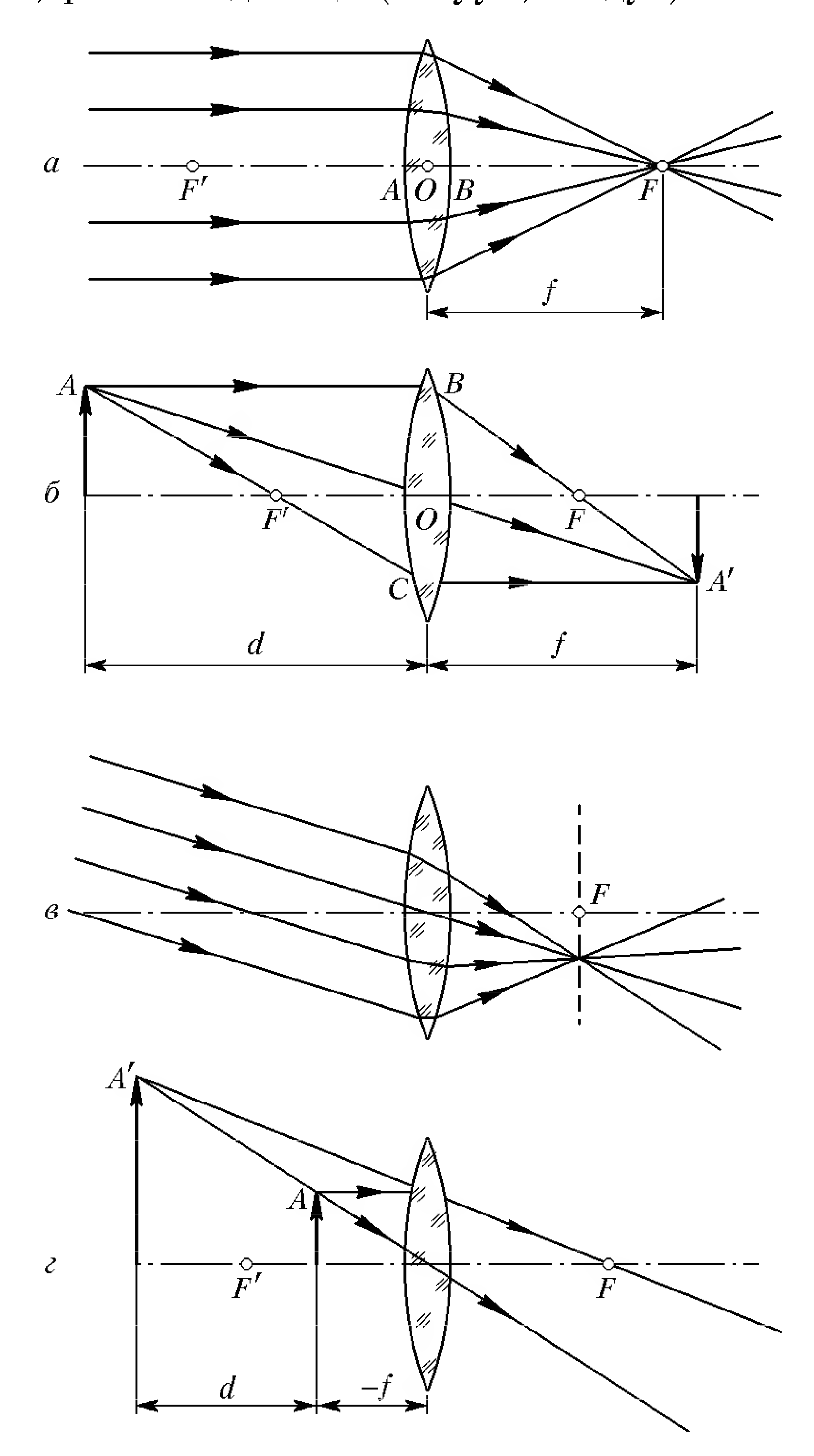


Рис. 240. Собирающая линза

верхностей плоская, ее радиус кривизны $R = \infty$. Для выпукло-вогнутой линзы радиус R_2 вогнутой поверхности в формуле (2) следует полагать отрицательным ($R_2 < 0$). Величину, обратную фо-

кусному расстоянию, называют *оптической силой* линзы:

$$D = 1/F.$$

Оптическую силу выражают в *диоптриях* (дптр). Линза в 1 дптр имеет фокусное расстояние 1 м.

Если пучок лучей, параллельных оптической оси, направить на линзу с противоположной стороны, он соберется в точке F'. Точки F и F' находятся на одинаковом расстоянии F от линзы, если по обе стороны линзы одна и та же среда.

Для построения изображения удобно использовать следующие лучи (рис. 240*б*):

1) луч AO, проходящий через оптический центр линзы без преломления;

2) луч AB, параллельный оптической оси; после преломления он проходит через фокус F;

3) луч $AF'C$, проходящий через передний фокус F'; после преломления луч параллелен оптической оси.

Параллельный пучок лучей, падающий на линзу под углом к оптической оси, собирается в точке, лежащей в фокальной плоскости линзы (рис. 240*в*).

Расстояние d от предмета до линзы и расстояние f от линзы до изображения связаны с фокусным расстоянием F такой же формулой, как и в случае сферического зеркала:

$$\frac{1}{d} + \frac{1}{f} = \frac{1}{F}. \qquad (3)$$

Это соотношение называется *формулой линзы*.

Если расстояние до предмета больше фокусного расстояния линзы ($d > F$), то изображение действительное перевернутое и расположено по другую сторону линзы (рис. 240*б*). Изображение уменьшенное при $d > 2F$ и увеличенное при $2F > d > F$. Если расстояние до предмета меньше фокусного расстояния, изображение мнимое прямое увеличенное и расположено с той же стороны от линзы, что и предмет (рис. 240*г*). Формула (3) справедлива и для мнимого изображения, если расстояние f, до него полагать отрицательным.

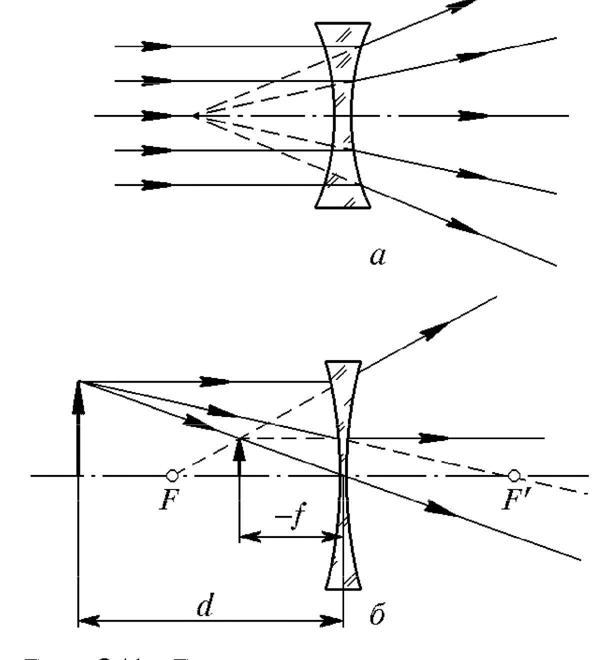


Рис. 241. Рассеивающая линза

Падающий на рассеивающую линзу пучок лучей, параллельных оптической оси, после преломления расходится так, как если бы лучи выходили из фокуса F, лежащего перед линзой (рис. 241*а*).

Изображение, образуемое рассеивающей линзой, при любом положении предмета мнимое прямое уменьшенное (рис. 241*б*). Фокусное

расстояние F рассеивающей линзы вычисляется по той же формуле (2). Радиусы кривизны вогнутых поверхностей подставляются в нее со знаком минус, и для рассеивающей линзы получается $F < 0$. Оптическая сила $D = 1/F$ также отрицательна. Положение изображения f находится по формуле (3). Так как $F < 0$, она дает $f < 0$, т. е. мнимое изображение расположенно с той же стороны от линзы, что и предмет.

Формирование собирающей линзой действительного изображения предмета объясняет принцип устройства и действия многих оптических приборов, таких как фотоаппарат, проекционный аппарат и т. д.

Фотоаппарат. Изображение фотографируемых предметов в *фотоаппарате* (действительное перевернутое, обычно уменьшенное) созда-

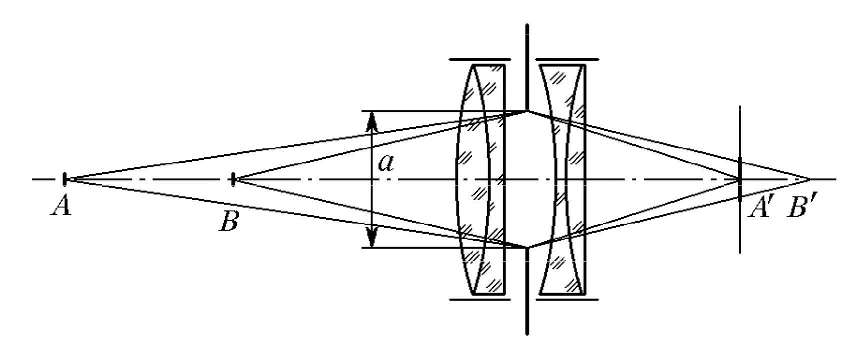


Рис. 242. Фотоаппарат

ется *объективом* (рис. 242). Одиночной линзе присущи хроматическая и сферическая аберрации, астигматизм и другие недостатки; поэтому объектив представляет собой многолинзовую систему, в которой исправлены те или иные аберрации. Поверхности линз покрыты просветляющим слоем, уменьшающим потери света из-за отражений. Действие слоя основано на явлении интерференции света.

В плоскости фотопленки получаются резкие изображения предметов, находящихся на определенном расстоянии от камеры (точка A на рис. 242). Наводка на резкость производится перемещением объектива. Изображения точек, не лежащих в плоскости наводки (точка B на рис. 242), получаются в виде кружков рассеяния. Размер этих кружков уменьшается при диафрагмировании объектива, т. е. при уменьшении относительного отверстия a/F, что приводит к увеличению глубины резкости.

Однако при диафрагмировании уменьшается световой поток, участвующий в формировании изображения, что требует увеличения выдержки для нормального экспонирования пленки. Наибольшее относительное отверстие a_{max}/F (при полностью открытой диафрагме) определяет светосилу объектива. Светосила равна квадрату отношения a_{max}/F.

Проекционный аппарат. В *проекционном аппарате* предмет (диапозитив *Д*) помещают на расстоянии d, заключенном в пределах от

F до $2F$ от объектива, так что на экране Э создается действительное увеличенное перевернутое изображение (рис. 243). Линейное увеличение, равное отношению размера изображения к размеру предмета, а тем самым отношению f/d, с помощью формулы линзы (3) можно записать в виде

$$\gamma = f/d = f/F - 1 \approx f/F. \tag{4}$$

Оно растет с увеличением расстояния f до экрана. Увеличение тем больше, чем меньше фокусное расстояние F объектива.

Конденсор K и зеркало $З$ служат для концентрации светового потока от источника в объектив. Конденсор рассчитывается так, чтобы

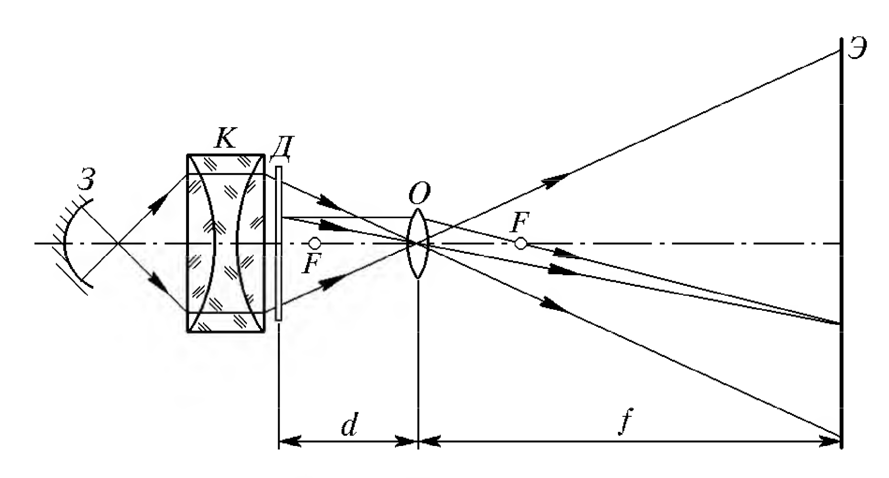


Рис. 243. Проекционный аппарат

создаваемое им действительное изображение светящегося тела источника находилось в отверстии объектива. Источник помещен в центр кривизны сферического зеркала.

Приборы для визуальных наблюдений. Оптические приборы, применяемые для визуальных наблюдений, имеют свои особенности.

Кажущийся размер рассматриваемого предмета определяется размером его изображения на сетчатке глаза, зависящим от угла, под которым виден предмет. Определение угла зрения θ ясно из рис. 244. Угол зрения не может быть меньше некоторого минимального значения, примерно равного $1'$, в противном случае глаз не может разрешить две точки, т. е. видеть их раздельно.

Угол зрения можно увеличить, приближая глаз к предмету. Для нормального глаза имеет смысл приближать предмет не более чем до 25 см, т. е. до расстояния наилучшего зрения, наиболее удобного для рассматривания деталей предмета. При меньших расстояниях человек с нормальным зрением лишь с трудом аккомодирует свой глаз. Но если перед глазом поместить собирающую линзу (лупу), то рассматриваемый предмет можно значительно

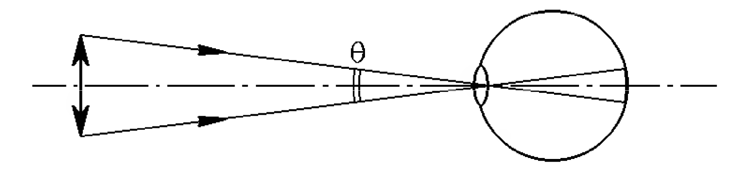


Рис. 244. Угол зрения

приблизить к глазу и тем самым увеличить угол зрения. Отношение угла зрения при наблюдении предмета через оптический прибор к углу зрения при наблюдении невооруженным глазом на расстоянии наилучшего зрения называется *увеличением* прибора.

Лупа. Ход лучей при рассматривании предмета через *лупу* показан на рис. 245. Предмет помещен перед линзой на расстоянии, немного меньшем фокусного. Лучи от любой точки предмета после преломления в линзе образуют пучок расходящихся лучей, продолжения которых пересекаются в одной точке, создавая мнимое изображение. Это изображение рассматривается глазом, помещаемым непосредст-

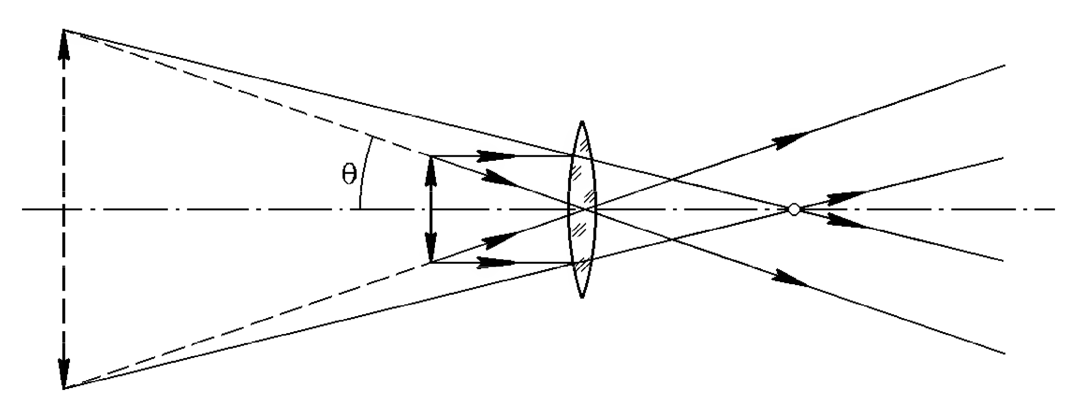


Рис. 245. Ход лучей в лупе

венно за лупой. При небольшом перемещении предмета вблизи фокуса положение мнимого изображения меняется значительно, и при совмещении предмета с фокусом оно вообще удаляется на бесконечность. Однако угловой размер θ изображения, как можно увидеть из рис. 245, при этом почти не меняется. Поэтому положение предмета практически не влияет на увеличение лупы, а сказывается только на аккомодации глаза при рассматривании мнимого изображения. Легко видеть, что увеличение лупы равно отношению расстояния наилучшего зрения d_0 к фокусному расстоянию F:

$$\Gamma = d_0/F. \tag{5}$$

Лупа с фокусным расстоянием 10 см дает увеличение 2,5x, с фокусным расстоянием 5 см — увеличение 5x.

Микроскоп. Для получения больших увеличений используют микроскоп. Оптическая система микроскопа (рис. 246) состоит из сложного многолинзового объектива с фокусным расстоянием f_1 в несколько миллиметров и окуляра с фокусным расстоянием f_2 в несколько сантиметров. Объектив создает действительное перевернутое увеличенное изображение $A'B'$ предмета AB, расположенного непосредственно перед фокусом объектива. Промежуточное изображение $A'B'$ рассматривается через окуляр, как через лупу. Для этого окуляр размещают так, чтобы изображение $A'B'$ находилось в его фокальной плоскости (или на расстоянии, немного меньшем фокусного).

Увеличение объектива $\Gamma_1 \approx f/d \approx l/f_1$, где l — длина тубуса микроскопа ($f \approx l$, так как промежуточное изображение $A'B'$ находится внутри тубуса перед окуляром, $d \approx f_1$). Увеличение окуляра $\Gamma_2 = d_0/f_2$, как у лупы. Общее увеличение микроскопа

$$\Gamma = \Gamma_1 \Gamma_2 = \frac{l d_0}{f_1 f_2}. \qquad (6)$$

Для согласования оптической системы микроскопа с глазом наблюдателя фокусное расстояние окуляра f_2 (при заданном фокусном расстоянии f_1 объектива) должно быть выбрано так, чтобы диаметр a выходящего из окуляра параллельного пучка лучей, исходящих из некоторой точки предмета, был равен диаметру зрачка глаза (или был в два-четыре раза меньше его при наблюдении ярких предметов). Это условие налагает ограничение на допустимое увеличение микроскопа ($\Gamma < 250 \div 1000$). При больших увеличениях a становится меньше диаметра зрачка и освещенность изображения на сетчатке глаза уменьшается.

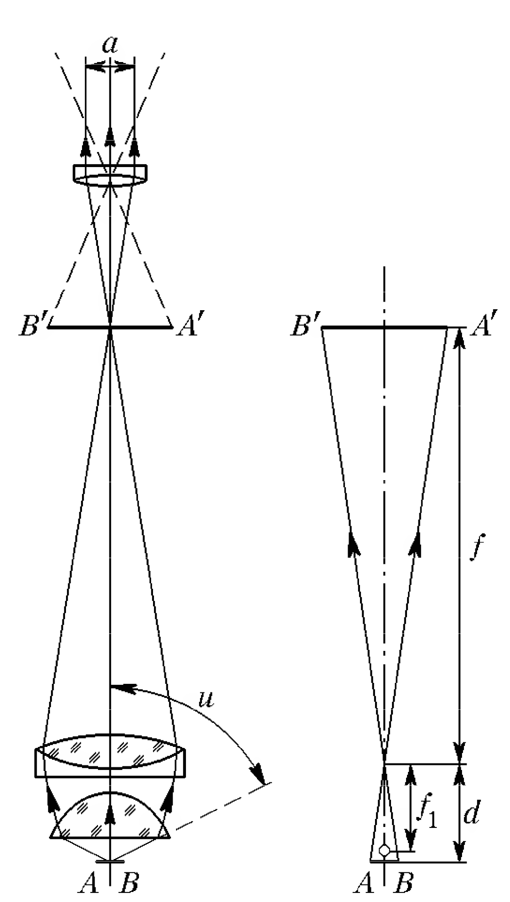


Рис. 246. Микроскоп

Минимальный размер $l_{\min}$ различимых в микроскоп деталей предмета обусловлен волновой природой света: изображение светящейся точки имеет вид дифракционного кружка. В результате не могут быть разрешены точки предмета, расстояние между которыми порядка длины световой волны. Применение увеличений свыше 1000x ведет лишь к увеличению размеров наблюдаемых дифракционных кружков и не выявляет никаких новых деталей предмета.

При использовании лупы и микроскопа увеличение угла зрения достигается благодаря приближению предмета к оптической системе. Но иногда приблизиться к предмету невозможно. Так обстоит дело, например, при наблюдении небесных тел. Тогда с помощью большой линзы, называемой объективом, получают действительное изображение удаленного тела. Это изображение значительно меньше, чем сам предмет, но зато к нему можно приблизить глаз и тем самым увеличить угол зрения. Так получается телескоп с одной линзой. Если же это изображение рассматривать в лупу (называемую окуляром), то можно еще больше приблизить глаз к действительному изображению удаленного предмета и тем самым еще больше увеличить угол зрения.

Ход лучей в простейшем двухлинзовом *телескопе* показан на рис. 247. От каждой точки удаленного предмета в объектив приходит практически параллельный пучок лучей, который дает изображение этой точки в фокальной плоскости объектива. Чтобы при наблюдении не напрягать глаз, фокальную плоскость лупы (окуляра)

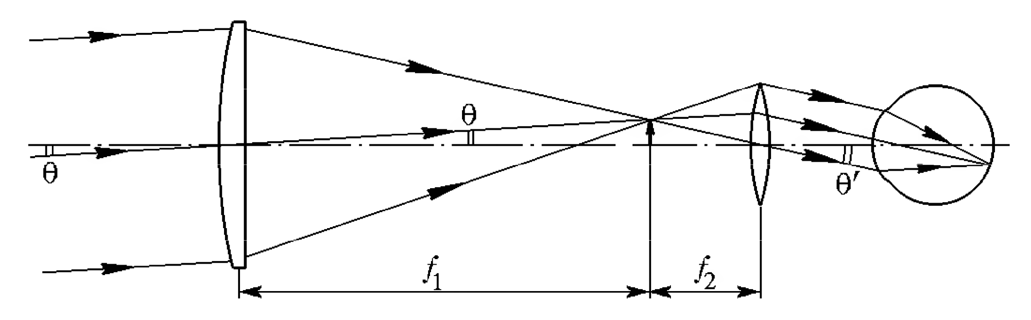


Рис. 247. Ход лучей в телескопе

обычно совмещают с фокальной плоскостью объектива. Тогда падающий на объектив параллельный пучок лучей выходит из окуляра также параллельным.

Пусть невооруженным глазом предмет виден под углом θ. Отношение угла θ′, под которым предмет виден в телескоп, к углу θ называется увеличением телескопа. Из рис. 247 видно, что это увеличение равно отношению фокусных расстояний объектива f_1 и окуляра f_2:

$$\Gamma = \theta'/\theta = f_1/f_2. \qquad (7)$$

Для получения большого увеличения нужен длиннофокусный объектив и короткофокусный окуляр. Уменьшая фокусное расстояние окуляра, можно получить с данным объективом большее увеличение.

Нормальное увеличение телескопа. Однако не всегда следует стремиться только к получению большого увеличения. Это целесообразно лишь тогда, когда мы рассматриваем яркий объект, излучающий много света. В случае слабо освещенных объектов требования иные. Предположим, что мы рассматриваем не точечные тела, такие, как звезды, а протяженные, например поверхность планеты. Нужно, чтобы освещенность изображения, получаемого на сетчатке глаза, была по возможности большей.

Легко убедиться, что освещенность изображения протяженного объекта при наблюдении в телескоп не может быть больше, чем при наблюдении невооруженным глазом. В самом деле, если увеличение телескопа равно Γ, то площадь изображения на сетчатке глаза в Γ^2 раз больше, чем при наблюдении без телескопа. Какой максимальный световой поток может попасть в глаз при данном увеличении? Диаметр попадающего в глаз параллельного пучка лучей не может быть больше диаметра зрачка глаза d. Поэтому, как видно из рис. 248 пучок попадающих в глаз лучей перед телескопом не может иметь диаметр, больший $D = \Gamma d$. Так как световой поток пропорционален квадрату диаметра пучка, то при наблюдении в телескоп световой по-

ток может вырасти не больше, чем в Γ^2 раз по сравнению с наблюдением невооруженным глазом. Итак, и площадь изображения на сетчатке глаза, и падающий на эту площадь световой поток вырастают в Γ^2 раз, и если можно пренебречь потерями света при отражении и поглощении в линзах, то освещенность изображения не меняется.

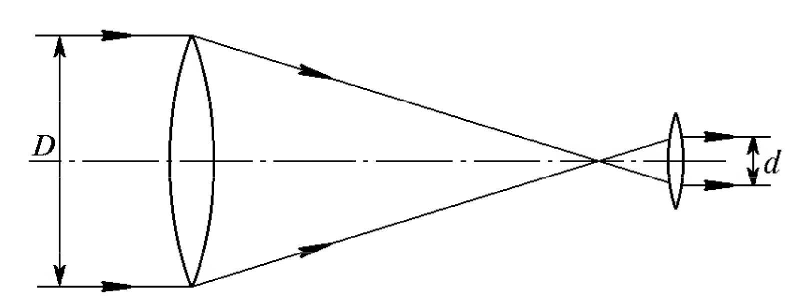
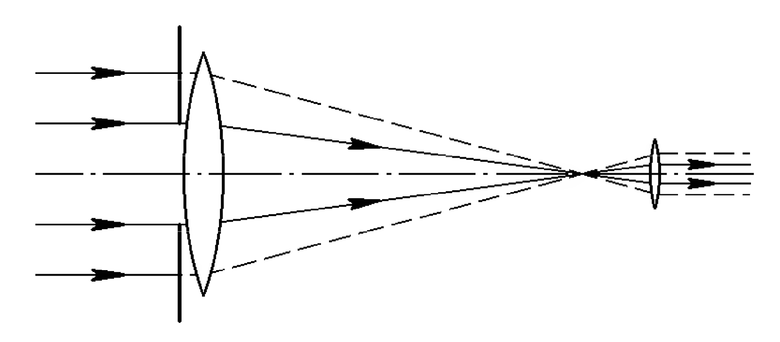


Рис. 248. К определению светового потока, попадающего в глаз наблюдателя

Из приведенных рассуждений ясно, что для получения заданного увеличения Г следует использовать объектив определенного диаметра, превосходящего диаметр зрачка глаза в Г раз. Если взять объектив большего диаметра, то часть собираемого им светового потока, как видно из рис. 249, просто не будет попадать в глаз. Если же взять объектив меньшего диаметра, то при прежнем увеличении уменьшится попадающий в глаз световой поток и освещенность изображения станет меньше. Это же можно сформулировать и иначе: для объектива заданного диаметра независимо от его фокусного расстояния существует определенное оптимальное увеличение, которое называется *нормальным*. Это есть то наибольшее увеличение, при котором получается изображение максимально возможной освещенности.


Рис. 249. К определению нормального увеличения

Таким образом, телескоп и глаз наблюдателя образуют единую систему, все элементы которой должны быть согласованы друг с другом. Это всегда учитывается при конструировании оптических приборов. Например, если мы хотим иметь полевой бинокль с десятикратным увеличением, то диаметр линз объектива должен быть в 10 раз больше диаметра зрачка глаза. Если принять средний диаметр зрачка равным 5 мм, то объектив должен быть диаметром 5 см.

Диаметр зрачка глаза не является постоянной величиной; он меняется от 6–8 мм в полной темноте до 2 мм при ярком дневном освещении. Поэтому при работе с телескопом, имеющим определенный диаметр объектива, например 200 мм, нужно всегда учитывать обстановку, определяющую размер зрачка глаза. Если наблюдается слабый объект в темную ночь, когда зрачок имеет диаметр не менее 6 мм, целесообразно выбрать окуляр так, чтобы увеличение телескопа равнялось $\Gamma = 200/6 = 33{,}4$. Но при наблюдении днем, когда диаметр зрачка около 2 мм, целесообразно повысить

увеличение втрое. Если фокусное расстояние a_1 нашего объектива равно 3 м, то в первом случае требуется окуляр с фокусным расстоянием $f_2 = 300/33{,}4 = 9$ см, а во втором — 3 см.

При наблюдении в телескоп протяженных объектов следует стремиться к тому, чтобы весь свет от объекта, входящий в объектив под разными углами, попадал бы в зрачок глаза. Для этого глаз следует располагать на определенном расстоянии от окуляра. В самом деле, окуляр как собирающая линза дает действительное изображение оправы объектива телескопа. Так как в телескопе всегда $F_1 \gg F_2$, то это изображение P находится почти в фокальной плоскости окуляра (рис. 250). Очевидно, что лучи, попадающие в объектив под разными углами, пройдут внутри этого изображения. Если условие согласования телескопа и глаза выполнено, то достаточно поместить зрачок глаза в то место, где находится изображение P оправы, чтобы все лучи попадали в глаз.

Так как такое изображение оправы объектива находится довольно далеко за окуляром, то использовать эту рекомендацию практически неудобно. Для устранения этого недостатка в оптическую систему телескопа включают еще одну собирающую линзу, называемую коллективом. Ее помещают между объективом и окуляром вблизи промежуточного действительного изображения предмета. Не изменяя углового увеличения всей системы, эта линза приближает к окуляру изображение P оправы объектива и тем самым позволяет поместить глаз непосредственно за окуляром. Роль такой дополнительной линзы сводится к увеличению поля зрения и в этом отношении она аналогична конденсору проекционного аппарата. Конструктивно коллектив обычно помещается в одной оправе с окуляром.

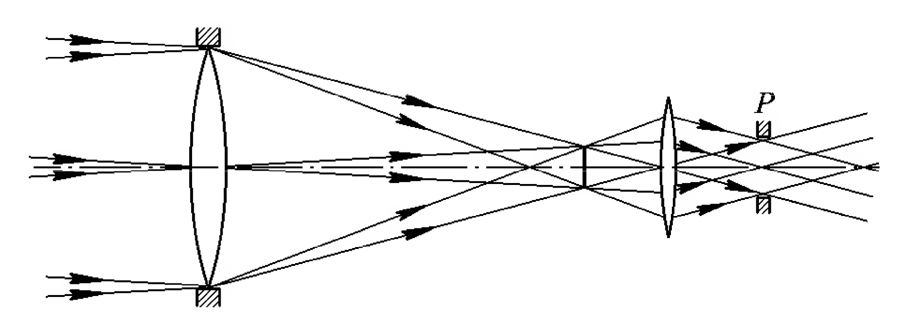


Рис. 250. При наблюдении в телескоп глаз следует располагать вблизи изображения оправы объектива P

Астрономические телескопы дают перевернутое изображение. Земные зрительные трубы в основном подобны астрономическим телескопам, за исключением того, что изображение у них должно быть правильным. Для переворачивания изображения можно воспользоваться либо призмами, как в полевом бинокле, либо дополнительными линзами.

Искажение перспективы и объемность изображения. При наблюдении пространства в зрительную трубу с большим увеличением

происходит сильное искажение перспективы: видимые расстояния кажутся сильно сокращенными в глубину. Расположенные на разных расстояниях предметы кажутся находящимися на одинаковом расстоянии, а объемные предметы — сильно уплощенными. Такие же искажения присущи фотоснимкам, сделанным с помощью длиннофокусного объектива (телеобъектива).

Ощущение объемности пространственной сцены сильно увеличивается при наблюдении двумя глазами. Это связано с параллаксом: один глаз видит предметы с несколько иной точки, чем другой. Поэтому в полевом бинокле оптические оси образующих его двух зрительных труб стараются разнести как можно дальше, «изламывая» эти оси с помощью призм полного отражения. Еще больший эффект увеличения объемности достигается в стереотрубе, представляющей собой по существу спаренные перископы.

Нормальное увеличение и дифракционный предел. Из-за волновой природы света изображение удаленной точки в фокальной плоскости объектива телескопа, как уже было показано, имеет вид дифракционного пятна. Изображения двух точек в фокальной плоскости объектива могут быть разрешены, если угловое расстояние между ними, как следует из формулы (3) § 33, не меньше значения $\theta \approx \lambda/D$. Каким следует выбрать увеличение телескопа, чтобы полностью использовать разрешающую способность его объектива?

Пусть угловое расстояние между двумя удаленными точками как раз равно предельному значению λ/D, которое еще может разрешить объектив телескопа. В телескоп с увеличением Γ эти точки будут видны под углом $\alpha = \Gamma\lambda/D$. Чтобы эти точки воспринимались глазом как раздельные, этот угол не должен быть меньше угла $\beta \approx \lambda/d$, который способен разрешить глаз. Поэтому $\Gamma\lambda/D \geqslant \lambda/d$, откуда

$$\Gamma \geqslant D/d. \tag{8}$$

Знак равенства в этом выражении соответствует нормальному увеличению, при котором наиболее эффективно используется световой поток, попадающий в объектив телескопа. При увеличениях, меньших нормального, как мы видели, используется только часть объектива, что приводит к уменьшению разрешающей способности. Использование увеличений, больших нормального, нецелесообразно, так как при этом разрешающая способность всей системы, определяемая пределом разрешения объектива λ/D, не увеличивается, а освещенность изображения на сетчатке глаза, как было показано выше, уменьшается.

Угловые размеры почти всех звезд много меньше разрешаемых угловых размеров даже самых больших телескопов. Поэтому изображение звезды в фокальной плоскости объектива телескопа неотличимо от изображения точечного источника света и представляет собой дифракционный кружок. Однако диаметр этого кружка настолько мал, что при использовании нормального увеличения он, как и сама звез-

да, для глаза неотличим от точечного источника света: размер дифракционного пятна на сетчатке глаза не зависит от того, наблюдается ли звезда в телескоп или непосредственно. Если телескоп не отличает звезду от точечного источника, то в чем же его преимущество при наблюдении звезд по сравнению с невооруженным глазом?

Дело в том, что в телескоп можно увидеть очень слабые звезды, вообще невидимые невооруженным глазом. Так как размер дифракционного изображения звезды на сетчатке глаза не меняется при использовании телескопа, то освещенность этого изображения пропорциональна попадающему в глаз световому потоку. Но этот поток при использовании телескопа во столько раз больше светового потока, проходящего через зрачок невооруженного глаза, во сколько раз площадь отверстия объектива больше площади зрачка глаза.

О решении задач. В связи с распространением световых лучей в разных условиях и с образованием изображений в оптических системах существует множество разнообразных задач. Не останавливаясь на этом вопросе, отметим лишь, что их решение в рамках геометрической оптики сводится к применению законов отражения и преломления света, к геометрическим построениям хода лучей, а также к использованию приведенных выше формул сферического зеркала и тонкой линзы. Фактически решение таких задач, как правило, ограничивается последовательным применением тех или иных сведений из геометрии. В некоторых случаях в их решении могут оказать помощь общие физические принципы, например соображения симметрии, обратимость хода лучей, принцип Ферма и т. д.

Основы фотометрии. Выше мы без детального разъяснения уже неоднократно использовали энергетические характеристики светового излучения, такие как освещенность, световой поток. Их изучение составляет предмет *фотометрии*.

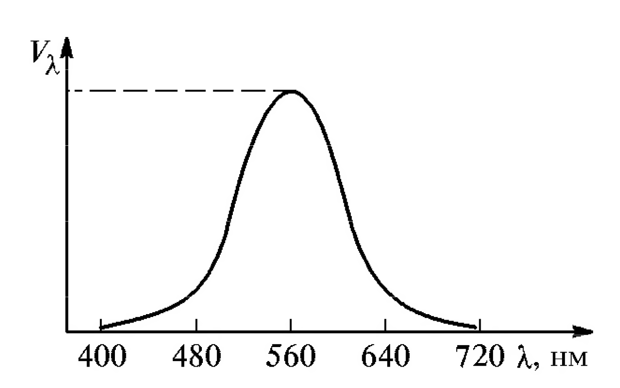


Рис. 251. Спектральная световая эффективность (кривая видности)

Основным понятием здесь служит *поток излучения*, т. е. полная мощность, переносимая электромагнитным излучением. Чувствительность глаза неодинакова к излучению разных длин волн: она максимальна в зеленой области спектра и плавно уменьшается до нуля при переходе к инфракрасному ($\lambda > 760$ нм) и ультрафиолетовому ($\lambda < 400$ нм) излучениям (рис. 251). Мощность оптического излучения, оцениваемая по зрительному ощущению, называется *световым потоком* Ф.

Источник света считается точечным, если он посылает свет равномерно по всем направлениям и его размеры много меньше рассто-

яний, на которых оценивается его действие. *Сила света* I источника измеряется световым потоком, распространяющимся от источника в пределах телесного угла в один стерадиан: $I = \Phi/\Omega$. Полный световой поток, распространяющийся по всем направлениям (т. е. в телесном угле $\Omega = 4\pi$), связан с силой света соотношением

$$\Phi = 4\pi I. \tag{9}$$

Основная единица световых (фотометрических) величин единица силы света *кандела* (кд). Это сила света определенного источника, принимаемого за эталон международным соглашением. Единица светового потока *люмен* — это световой поток от источника силой света 1 кандела, распространяющийся в телесном угле 1 стерадиан.

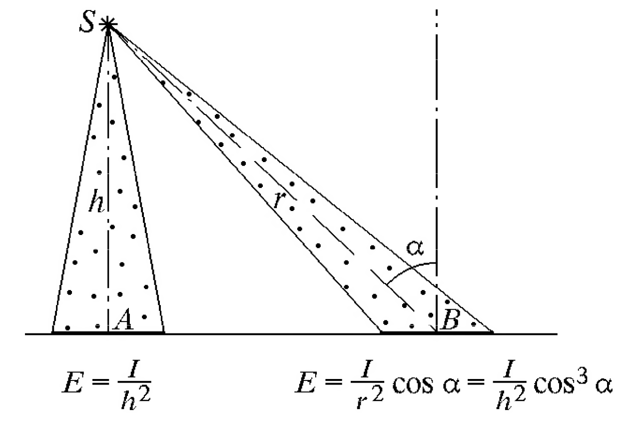


Рис. 252. Освещенность поверхности, создаваемая точечным источником

Освещенностью E поверхности называется отношение светового потока Φ, падающего на некоторый участок поверхности, к площади S этого участка: $E = \Phi/S$. Единица освещенности — *люкс*. Освещенность равна одному люксу, если на один квадратный метр равномерно освещенной поверхности приходится поток один люмен. Освещенность поверхности, расположенной перпендикулярно лучам от источника (точка A на рис. 252), обратно пропорциональна квадрату расстояния от источника:

$$E = I/h^2. \tag{10}$$

Освещенность поверхности при наклонном падении лучей (точка B на рис. 252) зависит от угла падения α:

$$E = \frac{I\cos\alpha}{r^2} = \frac{I}{h^2}\cos^3\alpha. \tag{11}$$

Здесь $r = h/\cos\alpha$ — расстояние от источника до точки наблюдения B, h — высота источника над освещаемой плоской поверхностью. В случае нескольких независимых (некогерентных) источников освещенность какой-либо поверхности равна сумме освещенностей, создаваемых каждым источником в отдельности.

Для измерения освещенности служат специальные приборы — фотометры, действие которых может быть основано на разных физических принципах. Одна из разновидностей фотометра — фотоэкспонометр, используемый для определения экспозиции при фотографировании.

- Какие ограничения накладывает волновая природа света на применимость представлений геометрической оптики?

- Почему в камере-обскуре при уменьшении размеров отверстия резкость изображения сначала увеличивается, а затем начинает уменьшаться вплоть до полного размывания и получения равномерно освещенного экрана?
- При каком диаметре отверстия камеры-обскуры резкость изображения будет наибольшей?
- Докажите, что выходящий из одной точки пучок лучей после преломления на плоской границе перестает быть гомоцентрическим.
- При каких условиях лучи, проходящие через оптическую систему, можно считать параксиальными?
- Докажите, что фокусное расстояние вогнутого сферического зеркала равно половине его радиуса кривизны.
- Объясните, почему мы видим отчетливые изображения предметов в произвольных кривых зеркалах (вспомните «комнату смеха»), хотя здесь участвуют явно не параксиальные пучки лучей. Чем в этом случае вызваны геометрические искажения изображений?
- Проделайте построение изображений предмета, создаваемых тонкой линзой, для разных положений предмета относительно линзы и убедитесь в справедливости утверждений, приведенных в тексте этого параграфа без доказательства.
- Объясните, почему при диафрагмировании объектива фотоаппарата увеличивается глубина резко отображаемого пространства?
- Чем определяется предельно достижимое увеличение оптического микроскопа?
- Что такое нормальное увеличение телескопа? Почему при наблюдении протяженных предметов нецелесообразно применять увеличения, превышающие нормальное?
- Поясните, почему с помощью оптической системы принципиально невозможно добиться увеличения освещенности наблюдаемого изображения предмета.
- Объясните аналогию между конденсором проекционного аппарата и линзой-коллективом телескопа.
- Почему при наблюдении в лупу или микроскоп сокращается глубина резкости, т. е. одновременно отчетливо видны предметы, находящиеся почти на одинаковом расстоянии? Почему в зрительной трубе или бинокле наблюдается обратный эффект?
- Почему при наблюдении в бинокль сильно искажается перспектива? Опишите и объясните эффект «перевернутого» бинокля, когда в него смотрят с обратной стороны.
- Почему в телескоп яркие звезды можно увидеть даже днем? Обсудите этот вопрос с точки зрения освещенности изображения звезды и фона (голубого неба).
- Покажите, что формулы (10) и (11) для освещенности поверхности следуют непосредственно из определений освещенности, светового потока и силы света.